

- (1) AB, BC, CD, DA と C_1 との交点をそれぞれ P, Q, R, S とおく。

$$DA = DS + SA = DR + AP$$

$$BC = BQ + CQ = BP + CR$$

辺々足して

$$DA + BC = (AP + BP) + (CR + DR) = AB + CD$$

$$\therefore DA = 3 + 4 - 2 = 5 \quad \dots(\text{答})$$

- (2) $\angle ADC = 180^\circ - \theta$

$\triangle ABC, \triangle ADC$ にそれぞれ余弦定理を用いて

$$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos \theta$$

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos(180^\circ - \theta)$$

$$\therefore 13 - 12 \cos \theta = 41 + 40 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{7}{13} \quad \dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2\sqrt{30}}{13} \end{aligned}$$

また、 $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$ なので、求める面積を S とおくと

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{30}}{13} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{30}}{13}$$

$$= 2\sqrt{30} \quad \dots(\text{答})$$

(1) 三平方の定理より

$$\begin{aligned} Q_n Q_{n+1} &= \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} \\ &= 2\sqrt{r_n r_{n+1}} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_n P &= \sqrt{(1 + r_n)^2 - (1 - r_n)^2} \\ &= 2\sqrt{r_n} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{n+1} P &= \sqrt{(1 + r_{n+1})^2 - (1 - r_{n+1})^2} \\ &= 2\sqrt{r_{n+1}} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $Q_n P = Q_n Q_{n+1} + Q_{n+1} P$ なので

$$2\sqrt{r_n} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}} + 2\sqrt{r_{n+1}}$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} (> 0) \text{ とおくと}$$

$$\frac{2}{x_n} = \frac{2}{x_n x_{n+1}} + \frac{2}{x_{n+1}} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + 1$$

であるから、数列 $\{x_n\}$ は初項 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}} = 1$ 、公差 1 の等差数列なので

$$x_n = n \quad \therefore r_n = \frac{1}{n^2} \quad \dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \cos \theta_n &= \frac{Q_n Q_{n+1}}{O_n O_{n+1}} = \frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{r_n + r_{n+1}} \\ &= \frac{2n^2 + 2n}{2n^2 + 2n + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} &= \frac{2n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 2n} - 1 \\ &= \frac{1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^m \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \end{aligned}$$

$m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n} = \frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を与えられた楕円の方程式に代入して

$$r^2 (\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) - 8r \sin \theta = 0$$

$$\therefore r = \frac{8 \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}, 0$$

ここで、 $r = 0$ のときは $\theta = 0$ だと考えれば、

$$r = \frac{8 \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

となる。(証明終)

(2) $\sin \theta = 0$ のとき $r = 0$

$\sin \theta \neq 0$ のとき

$$r = \frac{8}{\frac{1}{\sin \theta} + 3 \sin \theta}$$

$\sin \theta > 0$ より、相加・相乗平均の不等式を用いて

$$\frac{1}{\sin \theta} + 3 \sin \theta \geq 2 \sqrt{3 \sin \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}} = 2\sqrt{3} \quad (\text{等号成立は } 3 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ のとき})$$

$$\therefore r \leq \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ となり、}$$

$$r \text{ の最大値は } \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \dots(\text{答})$$

このとき $3 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ なので

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ なので} \quad \therefore P\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} d\theta$$

$\cos \theta = t$ と置換して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta = \int_1^0 \frac{8 \sin \theta}{1 + 3(1 - t^2)} \cdot \frac{1}{-\sin \theta} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}t} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}t} \right) dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\log |2 + \sqrt{3}t| - \log |2 - \sqrt{3}t| \right]_0^1$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \log(2 + \sqrt{3}) \quad \dots(\text{答}) \quad \because -\log(2 - \sqrt{3}) = \log(2 + \sqrt{3})$$

(1) 方程式 $ax = x^3 - x$ を解いて

$$x = 0, \pm\sqrt{a+1}$$

$x > 0$ より

$$x = \sqrt{a+1}$$

よって座標は

$$(\sqrt{a+1}, a\sqrt{a+1}) \quad \dots(\text{答})$$

(2) D_1, D_2 の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする。

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 ax dx + \int_1^{\sqrt{a+1}} (ax - x^3 + x) dx \\ &= \left[\frac{a}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4} x^4 + \frac{a+1}{2} x^2 \right]_1^{\sqrt{a+1}} \\ &= \frac{1}{4} a(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= -\int_0^1 (x^3 - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$S_1 : S_2 = 24 : 25$ より

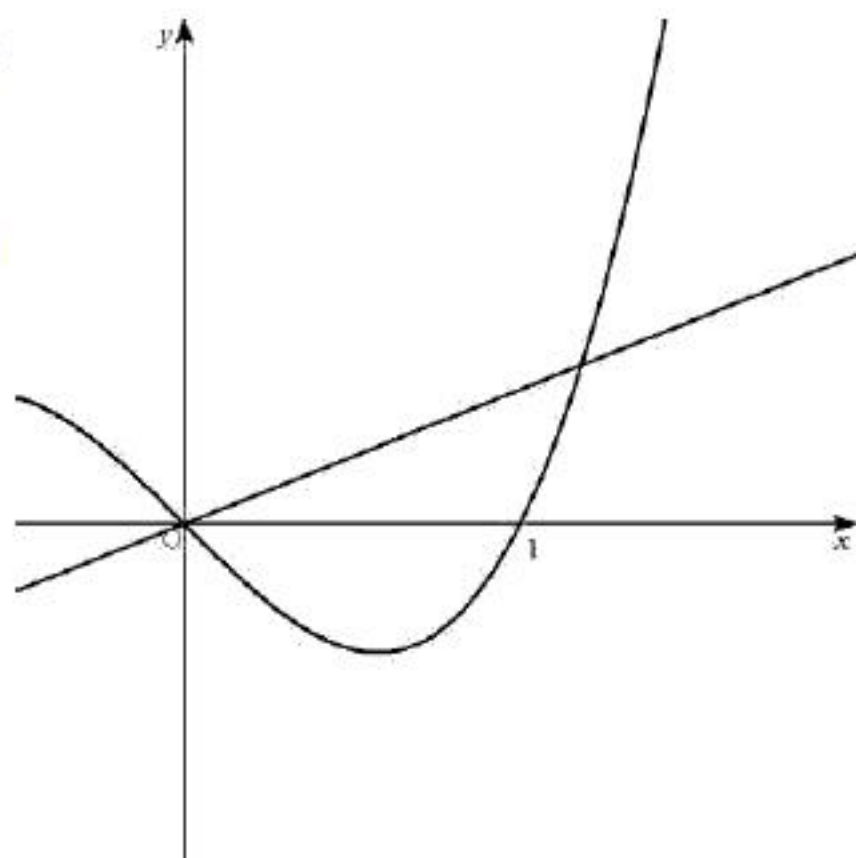
$$\frac{1}{4} \cdot 24 = \left\{ \frac{1}{4} a(a+2) \right\} \cdot 25$$

この方程式を解いて

$$a = \frac{2}{5}, -\frac{12}{5}$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{2}{5} \quad \dots(\text{答})$$

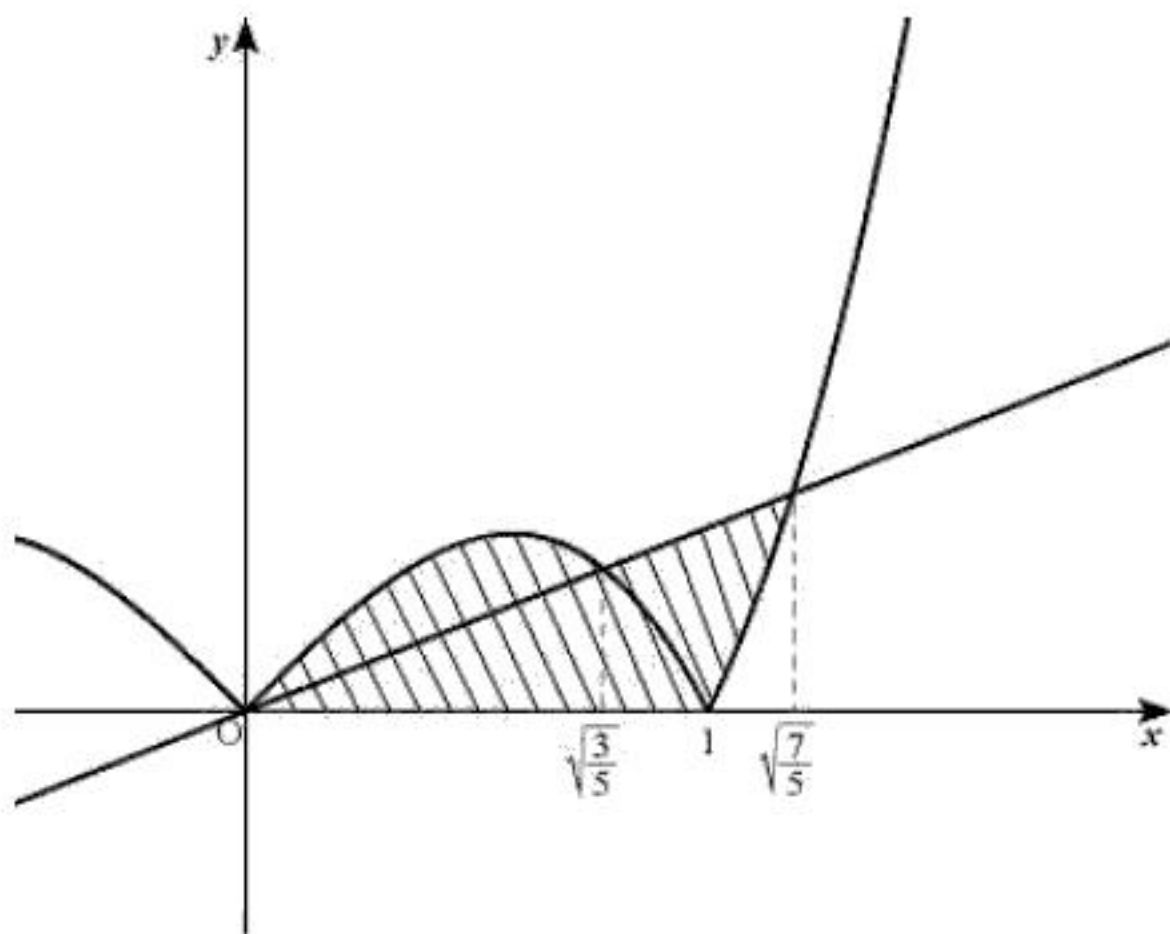


(3) $y = \frac{2}{5}x, y = |x^3 - x|$ の $x \geq 0$ における交点の x 座標を求める。

$$x \geq 1 \text{ のとき } \frac{2}{5}x = x^3 - x \text{ を解いて } x = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$0 \leq x < 1 \text{ のとき } \frac{2}{5}x = -x^3 + x \text{ を解いて } x = 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$$

よって、グラフは下のようになる。



求めるのは、図斜線部を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積なので
求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \pi (x - x^3)^2 dx + \int_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^1 \pi \left(\frac{2}{5}x \right)^2 dx - \int_1^{\sqrt{\frac{7}{5}}} \pi (x - x^3)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{7} x^7 \right]_0^{\sqrt{\frac{3}{5}}} + \pi \left[\frac{4}{75} x^3 \right]_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^1 - \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{7} x^7 \right]_1^{\sqrt{\frac{7}{5}}} \\ &= \frac{8}{35} \left(\frac{1}{3} + \frac{6\sqrt{15}}{125} \right) \pi \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$