

数 学

1 ～ 4 ページ

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、ただちにページ数を確認し、落丁や印刷の不鮮明なものなどがあれば申し出なさい。
3. 解答は、別に配られる解答用紙（1 ～ 2 ページ）の所定の場所に記入しなさい。
4. 解答時間は 75 分間です。
5. 受験番号を、問題冊子と解答用紙の所定欄に記入しなさい。
6. 試験終了後、解答用紙のみを提出しなさい。問題冊子は持ち帰りなさい。

受験番号	
------	--

- 1 四角形 $ABCD$ は, $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 4$ を満たし, 円 C_1 に外接し, 円 C_2 に内接している. 以下の問いに答えなさい.

- (1) DA を求めなさい.
- (2) $\angle ABC = \theta$ とおくとき, $\cos \theta$ の値を求めなさい.
- (3) 四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい.

2 半径 1 の円 O と半径 1 の円 O_1 が外接しており，さらに，2 つの円はともに直線 l に接している．いま図 1 のように，円 O_2 は，円 O と円 O_1 の両方に外接し，かつ，直線 l にも接している．以下， $n=2, 3, \dots$ に対して，円 O_{n+1} を円 O と円 O_n の両方に外接し，かつ，直線 l にも接しているように作っていくとする．円 O_n の半径を r_n で表すとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 円 O ， O_n および O_{n+1} と直線 l との接点を，それぞれ， P ， Q_n および Q_{n+1} とする（図 2 を参照）．このとき， $Q_n Q_{n+1}$ ， $Q_n P$ および $Q_{n+1} P$ を，それぞれ， r_n ， r_{n+1} を用いて表しなさい．

(2) r_n を n の式で表しなさい．

(3) 2 点 O_n と O_{n+1} を通る直線と直線 l とのなす角を θ_n で表す（図 2 を参照）．

ただし， $0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$ とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \theta_n}{\cos \theta_n}$$

を求めなさい．

図 1

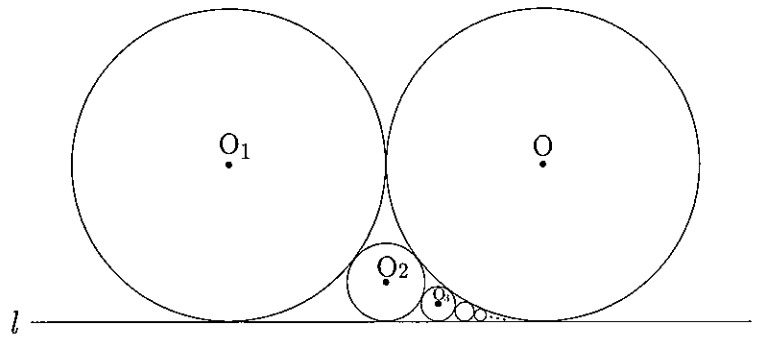
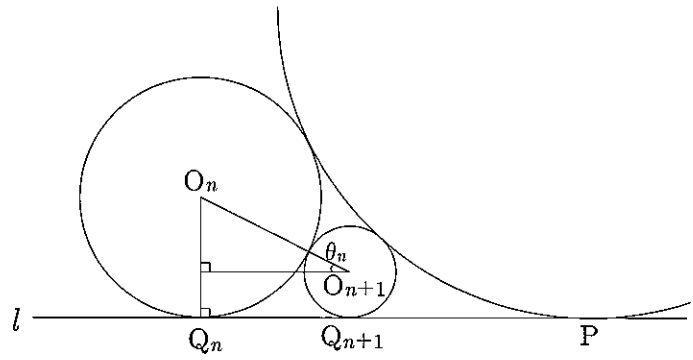


図 2



- 3 原点 O の座標平面上に楕円 $\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$ があり，楕円上に動点 P をとる． $OP = r$ とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) この楕円の極方程式は $r = \frac{8 \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}$ で与えられることを示しなさい．

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき， r の最大値とそのときの点 P の座標を求めなさい．

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta$ を求めなさい．

4 傾き a が正の直線 $y = ax$ と 3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフで囲まれる領域のうち、 $x \geq 0$ の範囲にある部分を D とする。以下の問いに答えなさい。

(1) この直線と 3 次関数のグラフの交点のうち、 x 座標が正である点の座標を求めなさい。

(2) 領域 D において、 y 座標が 0 以上の部分を D_1 、0 以下の部分を D_2 とする。 D_1 と D_2 の面積比が $24:25$ となるような a の値を求めなさい。

(3) a が (2) で求めた値のとき、領域 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。