

1

(1)

$$\begin{aligned}
 1.\dot{2}3\dot{8} &= 1 + 0.238 + 0.000238 + 0.000000238 + \dots \\
 &= 1 + 0.238 + 0.238 \times 10^{-3} + 0.238 \times 10^{-6} + \dots \\
 &= 1 + 0.238 \cdot \frac{1}{1-10^{-3}} \\
 &= \frac{1237}{999}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1237}{999}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 2y^2 - 3xy + 5y - 2 &= 2x^2 - 3xy - (2y-1)(y-2) \\
 &= (2x+y-2)(x-2y+1)
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad (2x+y-2)(x-2y+1)$$

(3)

直線と点の距離公式を用いて,

$$\frac{|3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$$

$$(\text{答}) \quad 2$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) - \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\
 &= \sqrt{3}\cos x = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos x = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

よって

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -\frac{19}{25}$$

$$(\text{答}) \quad \cos 2x = -\frac{19}{25}$$

(5)

$3^x = t (> 0)$ とおくと、与式は $t^3 - 3t^2 + 2 = 0$ となる。 $(t-1)(t^2 - 2t - 2) = 0$

$$t^3 - 3t^2 + 2 = (t-1)(t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 1, 1 \pm \sqrt{3}$$

$t > 0$ と $t = 1$ のとき $x = 0$ であることに注意すれば、 $t = 1 + \sqrt{3}$ が求める解に対応する。

したがって求める解は

$$x = \log_3(1 + \sqrt{3})$$

$$(\text{答}) \quad x = \log_3(1 + \sqrt{3})$$

(6)

白が 3 個以上含まれるのは、「赤 1 個白 3 個」か「白 4 個」のときなので、求める確率は

$$\frac{{}_6C_1 \cdot {}_8C_3}{{}_{14}C_4} + \frac{{}_8C_4}{{}_{14}C_4} = \frac{58}{143}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{58}{143}$$

(7)

$$\begin{aligned}
 |t\vec{a} + \vec{b}|^2 &= t^2|\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 &= 10t^2 - 20t + 20 \\
 &= 10(t-1)^2 + 10
 \end{aligned}$$

t は全ての実数を動くので、 $|t\vec{a} + \vec{b}|^2$ の最小値は 10 である。 $(t=1$ のとき)

$|t\vec{a} + \vec{b}|^2$ が最小値をとるとき、 $|t\vec{a} + \vec{b}|$ も最小値をとるので、 $|t\vec{a} + \vec{b}|$ は $t=1$ のとき最小値 $\sqrt{10}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{10}$$

(8)

$n > 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (n^3 + n^2 + n) - \{(n-1)^3 + (n-1)^2 + (n-1)\} \\
 &= 3n^2 - n + 1
 \end{aligned}$$

であるが、 $a_1 = 3$ なのでこの式は $n=1$ でも成り立つ。

したがって

$$a_n = 3n^2 - n + 1 \quad (n \geq 1)$$

$$(\text{答}) \quad a_n = 3n^2 - n + 1$$

(1)

三角形の内角をそれぞれの頂点の記号をとってあらわす（例えば $\angle BAC = A$ ）ことにする。三角形 ABC に正弦定理を用いると

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = 4$$

B が鈍角であるので、 A, C は鋭角である。ゆえに $A = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{4}$

したがって $B = \pi - (A + C)$ なので、

$$\begin{aligned} AC &= 4 \sin \{ \pi - (A + C) \} \\ &= 4 \sin (A + C) \\ &= 4 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad AC = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

(2)

円に内接する四角形の性質から、

$$\angle CDA = \pi - B = \frac{5}{12}\pi$$

また $BA \parallel CD$ なので、

$$\angle DAB = \frac{7}{12}\pi$$

ゆえに

$$\angle DAC = \angle DAB - \angle BAC = \frac{5}{12}\pi$$

よって三角形 ACD は $CA = CD$ 二等辺三角形である。

したがって求める面積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC + \frac{1}{2} CA \cdot CD \sin \angle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 \sin \left(\pi - 2 \cdot \frac{5}{12}\pi \right) \\ &= 3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad 3 + 2\sqrt{3}$$

(1)

$y = \frac{1}{x}$ を x で微分すると,

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

なので, 接線 l_n の方程式は

$$y = -\frac{1}{n^2}(x-n) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}x + \frac{2}{n}$$

接線 l_{n+1} の方程式は, l_n の方程式の n を $n+1$ に置き換えて,

$$y = -\frac{1}{(n+1)^2}x + \frac{2}{n+1}$$

接線 l_n と l_{n+1} の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(n+1)^2}x + \frac{2}{n+1} &= -\frac{1}{n^2}x + \frac{2}{n} \\ \therefore x &= \frac{2n(n+1)}{2n+1} \end{aligned}$$

である。 P_n の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n(n+1)}{2n+1} + \frac{2}{n} \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

よって P_n の座標は

$$\left(\frac{2n(n+1)}{2n+1}, \frac{2}{2n+1} \right)$$

$$(\text{答}) \left(\frac{2n(n+1)}{2n+1}, \frac{2}{2n+1} \right)$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_n A_n} &= \left(n, \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{2n(n+1)}{2n+1}, \frac{2}{2n+1} \right) \\ &= \left(-\frac{n}{2n+1}, \frac{1}{n(2n+1)} \right) \\ \overrightarrow{A_n A_{n+1}} &= \left(n+1, \frac{1}{n+1} \right) - \left(n, \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(1, -\frac{1}{n(n+1)} \right) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{P_n A_n}|^2 |\overrightarrow{A_n A_{n+1}}|^2 - (\overrightarrow{P_n A_n} \cdot \overrightarrow{A_n A_{n+1}})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^4+1}{n^2(2n+1)^2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2+1}{n^2(n+1)^2} - \left\{ -\frac{n^3(n+1)+1}{n^2(n+1)(2n+1)} \right\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}} \\ &= \frac{1}{2n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

また,

$$c_n = \frac{n+(n+1)}{2} = \frac{2n+1}{2}$$

なので,

$$c_n S_n = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \frac{1}{4}$$

4

(1)

曲線 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ ($-1<x<1$) と直線 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ の交点の x 座標は

$$1-\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$1-\frac{1}{\sqrt{3}}x=\sqrt{1-x^2}$$

両辺を 2 乗して

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2=(\sqrt{1-x^2})^2$$

$$x(2x-\sqrt{3})=0$$

$$x=0, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

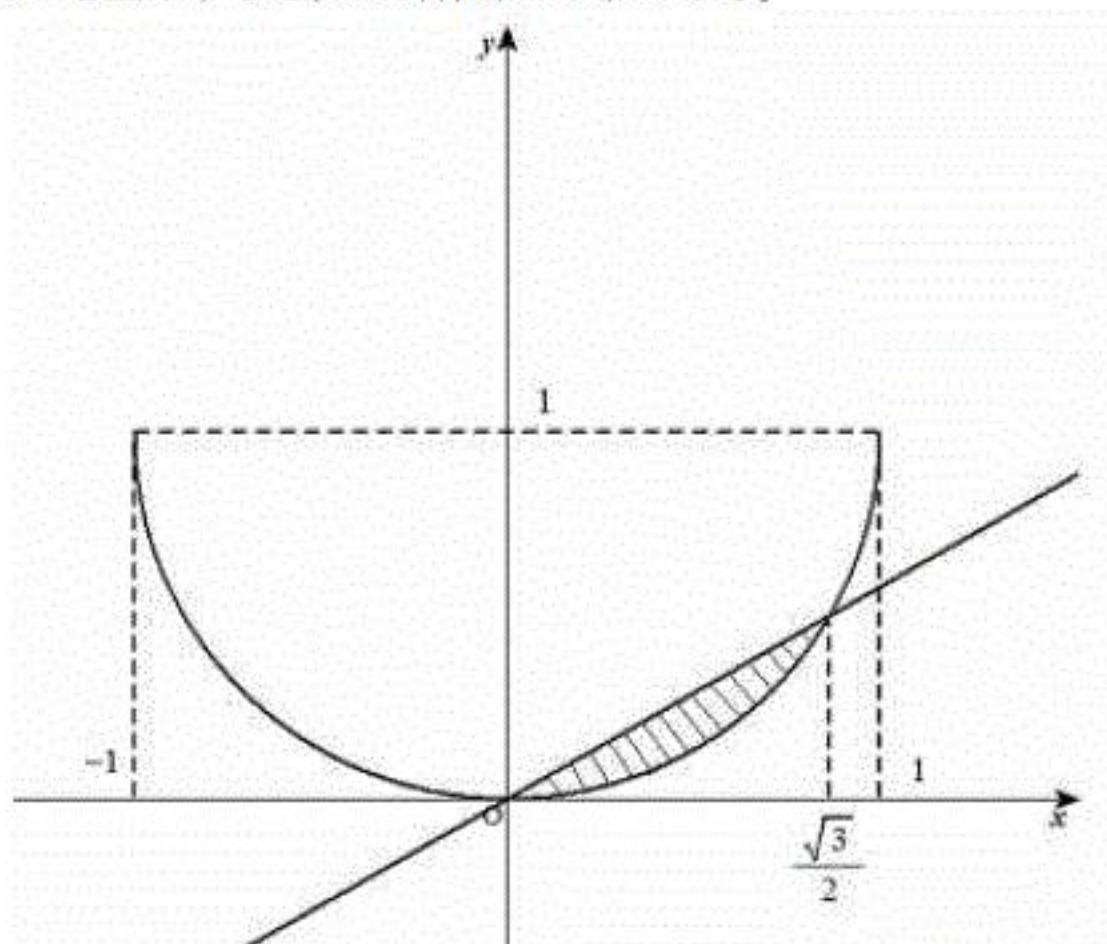
また、 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ の両辺を x で微分すると、

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって $-1<x<1$ の範囲で増減表を書くと次のようになる。

x	-1	...	0	...	1
y'		-		+	
y	1	↘	0	↗	1

ゆえに領域 D を図示すると次の斜線部のようになる。



よって D の面積を求めると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}x - (1-\sqrt{1-x^2}) \right\} dx &= \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - x \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx\end{aligned}$$

いま $x=\sin\theta$ とおくと、

$$dx=\cos\theta d\theta$$

また右の表から、

x	0	→	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	0	→	$\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2\theta} \cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

となる。したがって面積は

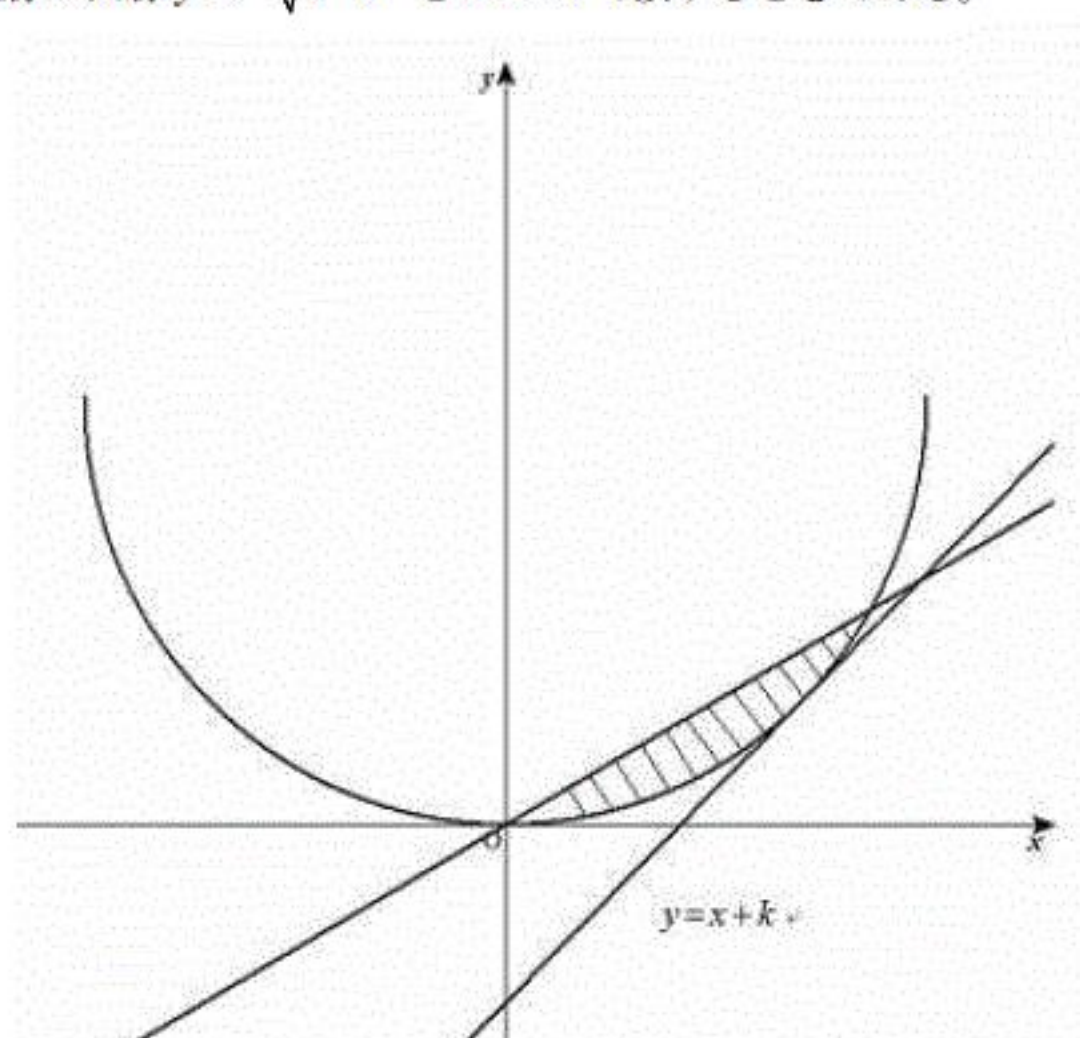
$$-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(2)

$y-x=k$ とおくと、これは $y=x+k$ なので、傾き 1、 y 切片 k の直線を表す。

これが領域 D と一つでも共有点を持てばよいので、 k が最小となるのは、次の図のようにこの直線が曲線 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ と $0<x<1$ で接するときである。



曲線 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ については

$$y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

なので、接点では

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

となる。両辺を 2 乗して整理すると、

$$x^2=\frac{1}{2}$$

$0<x<1$ に注意すれば、

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき、

$$y=1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これらが接点の座標である。したがって求める最小値は

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$$

$$(\text{答}) \quad 1-\sqrt{2}$$