

|     |                       |     |                                  |
|-----|-----------------------|-----|----------------------------------|
| (1) | $4\sqrt{5}+7$         | (2) | $-5\leq x\leq 4$                 |
| (3) | $x=3.32$              | (4) | $\frac{1088}{3125}$              |
| (5) | $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ | (6) | $6-\sqrt{3}$                     |
| (7) | $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ | (8) | $y=\frac{16}{15}x-\frac{17}{15}$ |

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\left(\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|\right)^3+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ & =\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^3+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}+\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} \\ & =\frac{1}{4}\left(5\sqrt{5}-15\sqrt{3}+9\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+\left(2+\sqrt{3}\right)^2 \\ & =4\sqrt{5}+7 \end{aligned}$$

(2)

(i)  $x<1$  のとき

$$\begin{aligned} |x-1| &=-(x-1) \text{ であるので、与式は、} \\ x^2+3(x-1)-7 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2+3x-10 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x+5)(x-2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -5 \leq x &\leq 2 \end{aligned}$$

よって、これと  $x<1$  より、このときの  $x$  の範囲は、

$$-5 \leq x < 1$$

である。

(ii)  $x \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} |x-1| &=x-1 \text{ であるので、与式は、} \\ x^2-3(x-1)-7 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2-3x-4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x+1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -1 \leq x &\leq 4 \end{aligned}$$

よって、これと  $x \geq 1$  より、このときの  $x$  の範囲は、

$$1 \leq x \leq 4$$

である。

以上(i), (ii)より、2次不等式の解は、

$$-5 \leq x \leq 4$$

である。

(答)  $-5 \leq x \leq 4$

(3)

$2^x=5^y$  の両辺の、10 を底とする対数を取ると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^x &= \log_{10} 5^y \\ \Leftrightarrow x \log_{10} 2 &= y \log_{10} 5 \\ \Leftrightarrow x \log_{10} 2 &= y(1-\log_{10} 2) \quad \left( \because \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y} &= \frac{1-\log_{10} 2}{x \log_{10} 2} \quad (\because xy \neq 0) \end{aligned}$$

よって、これを  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$  に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1-\log_{10} 2}{x \log_{10} 2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 1 + \frac{1-\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{0.3010} = 3.322 \dots \approx 3.32 \end{aligned}$$

である。

(4)

3 回目に白玉が出て、かつ、全部で少なくとも 2 回白玉が出るには、次の(i), (ii)が共に成り立てばよい。

[1] 3 回目に白玉が出る

[2] 1, 2, 4, 5 回目で少なくとも 1 回白玉が出る

[1] 3 回目に白玉が出るとき

この確率は、1 回の試行で白玉が出る確率なので、 $\frac{4}{10}$  である。

[2] 1, 2, 4, 5 回目で少なくとも 1 回白玉が出るとき

[2]の余事象『4 回の試行で 1 回も白玉が出ない』の確率が $\left(\frac{6}{10}\right)^4$  であるので、このときの確率は $1-\left(\frac{6}{10}\right)^4$  である。

[1], [2]は独立な事象なので、求める確率は、

$$\frac{4}{10} \times \left\{ 1 - \left( \frac{6}{10} \right)^4 \right\} = \frac{1088}{3125}$$

である。

(5)

$y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$  の逆関数は、 $y=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y^2}$  より、 $f^{-1}(x)=\frac{1}{x^2}$  なので、

$$\frac{df^{-1}}{dx} = -\frac{2}{x^3} (=g(x) \text{ とおく。})$$

である。ここで、

$$\frac{f^{-1}(\sqrt{6}+2h)-f^{-1}(\sqrt{6}-h)}{h} = \frac{f^{-1}(\sqrt{6}+2h)-f^{-1}(\sqrt{6})-\{f^{-1}(\sqrt{6}-h)-f^{-1}(\sqrt{6})\}}{h}$$

$$= 2 \cdot \frac{f^{-1}(\sqrt{6}+2h)-f^{-1}(\sqrt{6})}{2h} + \frac{f^{-1}(\sqrt{6}-h)-f^{-1}(\sqrt{6})}{-h}$$

が成り立つが、 $h \rightarrow 0$  のとき、 $2h \rightarrow 0, -h \rightarrow 0$  であるので、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(\sqrt{6}+2h)-f^{-1}(\sqrt{6})}{2h} = g(\sqrt{6})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(\sqrt{6}-h)-f^{-1}(\sqrt{6})}{-h} = g(\sqrt{6})$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(\sqrt{6}+2h)-f^{-1}(\sqrt{6}-h)}{h} &= 2g(\sqrt{6})+g(\sqrt{6}) \\ &= 3g(\sqrt{6}) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

である。

(6)

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right)$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \left| \sqrt{3} \cos x - \sin x \right| dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} 2 \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) dx - 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) dx \\ &= 2 \left[ -\cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} - 2 \left[ -\cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= 6 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

(7)

$|\vec{p}|=1$  より、 $\vec{p}=(\cos \theta, \sin \theta)$  とおける。このとき、 $\vec{p} \cdot \vec{u}=\cos \theta$  なので、

$$\cos \theta \geq \frac{2}{3}$$

よって、 $\cos \alpha=\frac{2}{3}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$  を満たす実数  $\alpha$  を定めると、

$$-\alpha \leq \theta \leq \alpha$$

である。よって、

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{p}|^2 &= (\cos \theta-2)^2 + (\sin \theta-\sqrt{5})^2 \\ &= 10-4 \cos \theta-2\sqrt{5} \sin \theta \\ &= 10-6 \cos (\theta-\alpha) \end{aligned}$$

は  $\theta=-\alpha$  のとき最大となり、このとき、

$$\begin{aligned} 10-6 \cos 2 \alpha &= 10-6\left(2 \cos ^2 \alpha-1\right) \\ &= 10-6\left(\frac{8}{9}-1\right) \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。 $|\vec{a}-\vec{p}|^2$  が最大のとき、 $|\vec{a}-\vec{p}|$  も最大であるので、 $|\vec{a}-\vec{p}|$  の最大値は、

$$\sqrt{\frac{32}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

である。

(8)

接点を  $(X, Y)$  とおくと、接線の式は、

$$4Xx+Yy=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。この直線が  $(2, 1)$  を通るので、

$$\begin{aligned} 8X+Y &= 1 \\ \Leftrightarrow Y &= 1-8X \end{aligned}$$

これと楕円の方程式を連立させると、

$$\begin{aligned} 4X^2+(1-8X)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 68X^2-16X &= 0 \\ \Leftrightarrow X(17X-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= 0, \frac{4}{17} \end{aligned}$$

[1]  $X=0$  のとき

接線の式は  $y=1$  で、傾きは 0 である。

[2]  $X=\frac{4}{17}$  のとき

$$Y=1-8X=-\frac{15}{17}$$

これを①式に代入すると、接線の式は、

$$\begin{aligned} \frac{16}{17}x-\frac{15}{17}y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{16}{15}x-\frac{17}{15} \end{aligned}$$

よって、このときの接線の傾きは  $\frac{16}{15}(>0)$  である。

以上[1], [2]より、求める接線の方程式は、

$$y=\frac{16}{15}x-\frac{17}{15}$$

である。

(1)

求める放物線は点  $(0, 1)$  を通るので、ある実数  $k$  を用いて、

$$y = kx^2 + 1$$

とおける。これが  $A(\alpha, \cos \alpha)$  を通るので、

$$\cos \alpha = k\alpha^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \left( \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

よって、放物線の式は、

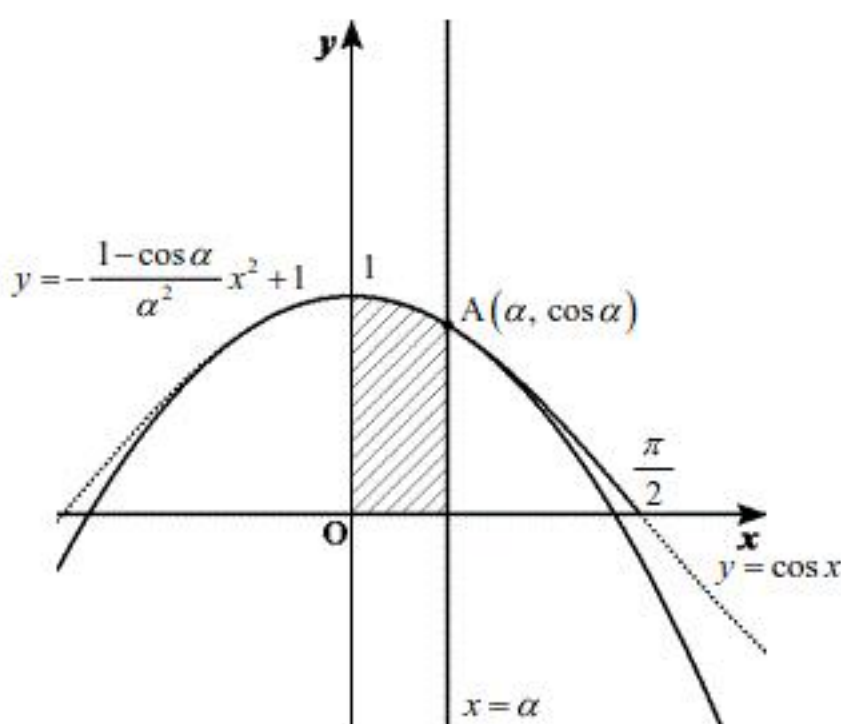
$$y = -\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} x^2 + 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} x^2 + 1$$

(2)

$S(\alpha)$  は次図の斜線部である。



よって、

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_0^\alpha \left( -\frac{\cos \alpha - 1}{\alpha^2} x^2 + 1 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{\cos \alpha - 1}{3\alpha^2} x^3 + x \right]_0^\alpha \\ &= \frac{\cos \alpha - 1}{3} \alpha + \alpha \\ &= \frac{\alpha(\cos \alpha + 2)}{3} \end{aligned}$$

である。

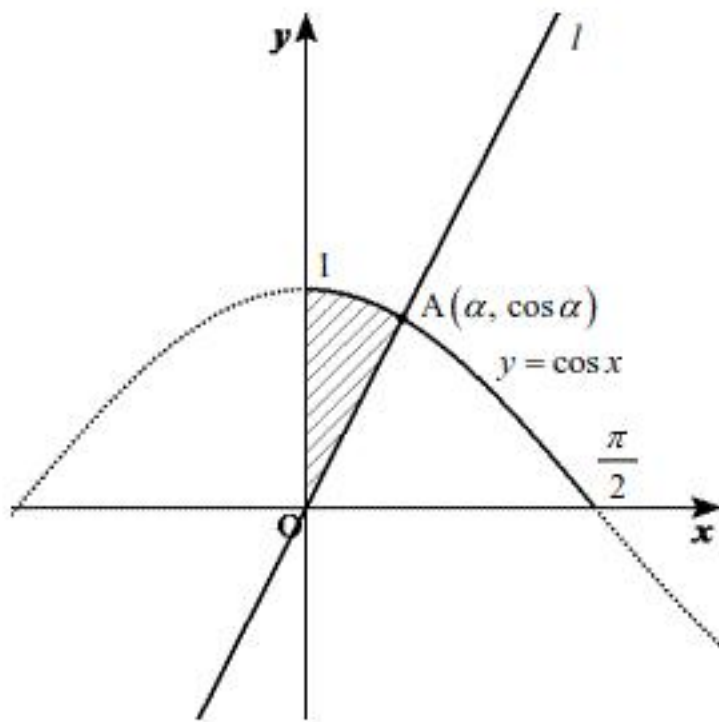
$$(\text{答}) \quad \frac{\alpha(\cos \alpha + 2)}{3}$$

(3)

直線  $l$  の方程式は、

$$y = \frac{\cos \alpha}{\alpha} x$$

である。よって  $T(\alpha)$  は次図の斜線部である。



よって、 $T(\alpha)$  は  $x$  軸、 $y$  軸、曲線  $y = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \alpha$ )、直線  $x = \alpha$  で囲まれる図形の面積から、直線  $l$ 、直線  $x = \alpha$ 、 $x$  軸で囲まれた図形(三角形)の面積を引いたものなので、

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \int_0^\alpha \cos x \, dx - \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha \\ &= \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{T(\alpha)}{S(\alpha)} &= \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha}{\frac{\alpha(\cos \alpha + 2)}{3}} \\ &= \frac{3}{\cos \alpha + 2} \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

であり、 $\alpha \rightarrow 0$  のとき、 $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$  より、

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{T(\alpha)}{S(\alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{3}{\cos \alpha + 2} \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \\ &= \frac{3}{1+2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

(1)

まず、 $\overrightarrow{OB}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  で表すことを考える。図形 ABCDEFGH は正八角形なので、ある実数  $t (> 0)$  を用いて、

$$\overrightarrow{OB} = t(\vec{a} + \vec{b})$$

と表せる。この両辺を 2 乗すると、 $|\overrightarrow{OB}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  ( $\because \vec{a}, \vec{b}$  は直交する。) に注意して、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 &= t^2 (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) \\ \Leftrightarrow 1 &= 2t^2 \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG} \\ &= k\overrightarrow{OB} + (1-k)\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OG} \\ &= k\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + (1-k)(-\vec{a}) - (-\vec{b}) \\ &= \frac{(\sqrt{2}+2)k-2}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}k+2}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{GP} = \frac{(\sqrt{2}+2)k-2}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}k+2}{2}\vec{b}$$

(2)

(1)より、

$$\overrightarrow{GP} = \frac{(\sqrt{2}+2)k-2}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}k+2}{2}\vec{b}$$

この両辺を 2 乗して整理すると、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  も用いて、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{GP}|^2 &= (2+\sqrt{2})k^2 - 2k + 2 \\ &= (2+\sqrt{2})\left(k - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} + 2 \end{aligned}$$

実数  $k$  は  $0 < k < 1$  の範囲を動くので、 $|\overrightarrow{GP}|^2$  は  $k = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  のときに最小値をとる。

$|\overrightarrow{GP}|^2$  が最小のとき、 $|\overrightarrow{GP}|$  も最小になるので、求める  $k$  の値は  $k = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$  である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

(3)

重心を I とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OG} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

である。ここで、点 G, P, I は同一直線上にあるので、ある実数  $l$  を用いて  $\overrightarrow{GP} = l\overrightarrow{GI}$  とおける。つまり、

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2}+2)k-2}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}k+2}{2}\vec{b} &= l\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(\sqrt{2}+2)k-2}{2} + \frac{1}{3}l\right)\vec{a} + \left(\frac{\sqrt{2}k+2}{2} - l\right)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$  は 1 次独立なので、

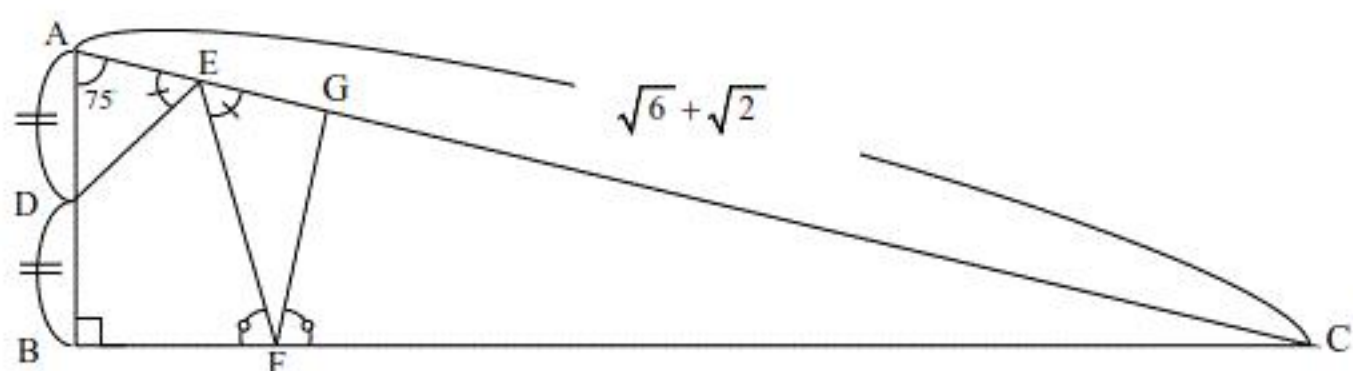
$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{2}+2)k-2}{2} + \frac{1}{3}l = 0 \\ \frac{\sqrt{2}k+2}{2} - l = 0 \end{cases}$$

これを解くと、

$$\begin{aligned} k &= 6 - 4\sqrt{2} \\ l &= 3\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = 6 - 4\sqrt{2}$$



(1)

三角形 ABC と三角形 FGC は相似なので、

$$\angle CFG = \angle CAB = 75^\circ$$

よって、

$$\angle EFB = \angle CFG = 75^\circ$$

$$\angle EFG = 180^\circ - 75^\circ \times 2 = 30^\circ$$

$$\angle FEG = 90^\circ - \angle EFG = 60^\circ$$

$$\angle AED = \angle FEG = 60^\circ$$

$$\angle ADE = 180^\circ - \angle AED - \angle CAB = 45^\circ$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} AB &= AC \sin \angle ACB \\ &= AC \sin 15^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって、

$$AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$$

また、三角形 ADE について正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AE}{\sin 45^\circ} &= \frac{AD}{\sin 60^\circ} \\ \Leftrightarrow AE &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(2)

三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 1^2} = 2 + \sqrt{3}$$

$CG = x$  とおくと、三角形 ABC と三角形 FGC は相似なので、

$$CG : CB = FG : AB$$

$$\Leftrightarrow x : (2 + \sqrt{3}) = FG : 1$$

$$\Leftrightarrow FG = \frac{x}{2 + \sqrt{3}}$$

よって、

$$EG = \frac{1}{\sqrt{3}} FG = \frac{\sqrt{3}x}{3(2 + \sqrt{3})}$$

である。  $AC = AE + EG + GC$  に注意すれば、

$$\begin{aligned} \sqrt{6} + \sqrt{2} &= \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}x}{3(2 + \sqrt{3})} + x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{4}$$