

1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$\frac{39}{8}\sqrt{2}-5$	$a>-3+\sqrt{6}$	$\frac{40}{7}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$	$-\frac{1}{8}\leq k\leq 11$
(6)		(7)	(8)	
$\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}b+\frac{4}{9}c$		57 桁	$a=\frac{\sqrt{2}}{2}, k=\frac{\sqrt{3}}{2}$	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}2\times 8^{\frac{1}{6}}-\frac{2^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2}+1)^3}+2^{\frac{5}{2}}\log_28&=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{(2-1)^3}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\\&=\sqrt{2}-\left(5-\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)+\frac{3}{8}\sqrt{2}\\&=\frac{39}{8}\sqrt{2}-5\end{aligned}$$

となる。

(2)

放物線 $y=3x^2$ と直線 $y=2ax+2a+1$ の交点の x 座標は、 x に関する方程式

$$3x^2=2ax+2a+1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-2ax-(2a+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の解に一致する。この 2 つの図形が異なる 2 点を共有するとき、方程式①は異なる 2 つの実数解をもつ。二次方程式①の判別式を D とすると、満たすべき条件は

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&>0\\&\Leftrightarrow a^2+3(2a+1)>0\\&\Leftrightarrow a^2+6a+3>0\\&\Leftrightarrow a<-3-\sqrt{6}, a>-3+\sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。 a は $a\geq-3$ を満たす定数であることから、求める a の値の範囲は $a>-3+\sqrt{6}$ である。

(3)

点 B から x 軸に下した垂線の足を点 D 、点 B と x 軸に関して対称な点を点 C とするとき、長さの和 $AP+BP$ を最小にするような点 P は図のように線分 AC と x 軸との交点にあたる。よって、点 P の x 座標は $\triangle AOP$ と $\triangle CDP$ が相似であることを利用して

$$8\times\frac{5}{5+2}=\frac{40}{7}$$

となる。

(4)

$\angle ABC=30^\circ$ より、 $AB=4$ である。 $\triangle ACD$ は $AC=DC$ の直角二等辺三角形であるから、

$\angle ADB=135^\circ$ である。よって、正弦定理より $\triangle ABD$ の外接円の半径は

$$\frac{AB}{2\sin135^\circ}=2\sqrt{2}$$

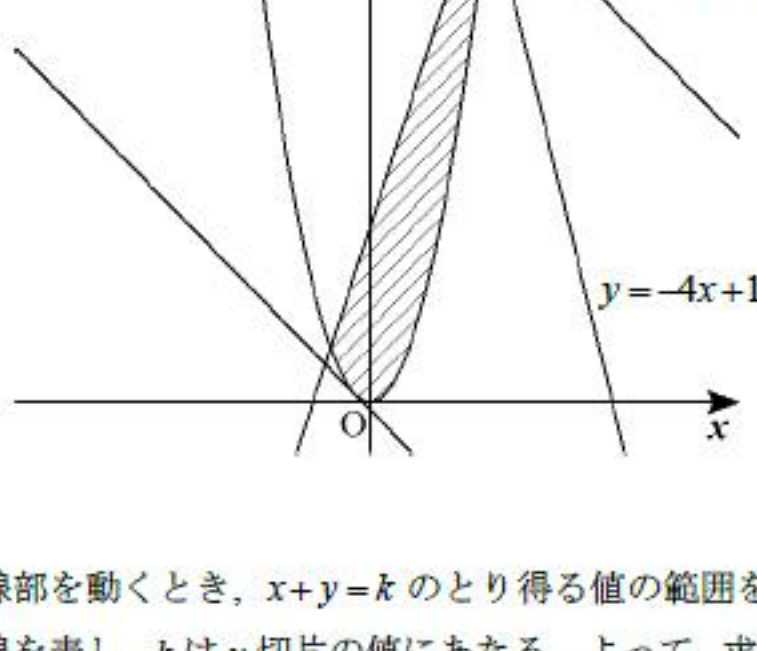
となる。外接円の中心を点 P とすると、 $PA=PD=2\sqrt{2}$ 、 $AD=2\sqrt{2}$ だから $\triangle PAD$ は正三角形である。よって、 $\angle APD=60^\circ$ だから弧 AD の長さは

$$2\times2\sqrt{2}\times\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

となる。

(5)

直線 $y=3x+3$ 、 $y=-4x+17$ の交点の x 座標は方程式 $3x+3=-4x+17$ を解いて 2 となり、直線 $y=3x+3$ と放物線 $y=2x^2$ の交点の x 座標は $2x^2=3x+3$ を解いて $\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$ となる。 $\sqrt{33}>5$ であることより、 $\frac{3+\sqrt{33}}{4}>2>\frac{3-\sqrt{33}}{4}$ だから二本の直線の交点は放物線の内側にある。このことに注意して問題の領域を図示すると下図のようになる。



実数 x, y が上図の斜線部を動くとき、 $x+y=k$ のとり得る値の範囲を考える。座標平面上において $x+y=k$ は直線を表し、 k は y 切片の値にあたる。よって、求める k の値の範囲は、上図の斜線部と直線 $x+y=k$ が共有点をもつときの直線の y 切片の値の範囲である。 k が最大となるのは、直線 $x+y=k$ が直線 $y=3x+3$ と直線 $y=-4x+17$ との交点 $(2, 9)$ を通るときであり、このときの k の値は $k=11$ である。 k が最小となるのは、直線 $x+y=k$ が放物線 $y=2x^2$ と接するときである。このときの接点の x 座標を t とおくと、放物線 $y=2x^2$ の $x=t$ における接線の傾きと直線 $x+y=k$ の傾き -1 が一致する。よって、 $y=2x^2$ について $y'=4x$ となることから

$$\begin{aligned}4t&=-1\\&\Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。よって、接点の座標は $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ となり、このときの k の値は

$$\begin{aligned}k&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\\&=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

となる。よって、 k の取り得る範囲は $-\frac{1}{8}\leq k\leq 11$ である。

(6)

題意から $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$ 、 $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{b}$ である。よって、 $\overrightarrow{OF}=5\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ となる。点 G は線分 DF

上の点であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=s\overrightarrow{OF}+(1-s)\overrightarrow{OD}\\&=3s\overrightarrow{a}+2s\overrightarrow{b}+\frac{1-s}{2}\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

とかける。ここで、点 G は点 A, B, C と同一平面上の点であるから

$$\begin{aligned}3s+2s+\frac{1-s}{2}&=1\\&\Leftrightarrow s=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

となり、このとき

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a}+\frac{2}{9}\overrightarrow{b}+\frac{4}{9}\overrightarrow{c}$$

となる。

(7)

$$\begin{aligned}1+9+9^2+\cdots+9^{n-1}&=\frac{9^n-1}{9-1}\\&=\frac{3^{2n}-1}{8}\end{aligned}$$

であることから、 $3^{2n}-1=a(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})$ が成り立つとき、 $a=8$ である。このとき

$$\begin{aligned}3^{120}+7&=3^{120}-1+8\\&=8(1+9+9^2+\cdots+9^{120-1})+8\\&=8(1+9+9^2+\cdots+9^{120-1}+1)\end{aligned}$$

より、 $3^{120}+7$ は 8 の倍数であるから、 $\frac{3^{120}+7}{8}$ は整数である。 $\frac{3^{120}}{8}\leq\frac{3^{120}+7}{8}\leq\frac{3^{121}}{8}$ であり

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{3^{120}}{8}&=120\times\log_{10}3-3\times\log_{10}2\\&=56.349\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{3^{121}}{8}&=121\times\log_{10}3-3\times\log_{10}2\\&=56.8261\end{aligned}$$

であることから、 $56<\log_{10}\frac{3^{120}+7}{8}<57$ となり、 $\frac{3^{120}+7}{8}$ の桁数は 57 桁である。

(8)

点 P の座標を (X, Y) とおくと、点 P は双曲線上にあるから

$$Y^2=\frac{(X-2\sqrt{2})^2}{3}-2$$

を満たす。また

$$\begin{aligned}PH&=|X-a|\\OP&=\sqrt{X^2+Y^2}\\&=\sqrt{\frac{4}{3}X^2-\frac{4}{3}\sqrt{2}X+\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

である。 $k=\frac{PH}{OP}$ とするとき、 $PH>0$ 、 $OP>0$ より $k>0$ となり、 $PH^2=k^2OP^2$ が成り立つ。こ

れより

$$\begin{aligned}|X-a|^2&=k^2\left(\frac{4}{3}X^2-\frac{4}{3}\sqrt{2}X+\frac{2}{3}\right)\\&\Leftrightarrow\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)X^2+\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}k^2-2a\right)X+a^2-\frac{2}{3}k^2=0\quad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。これが点 P の位置によらず成立するから、①式は X の恒等式となり、満たすべき条件は

$$\begin{cases}1-\frac{4}{3}k^2=0\\ \frac{4}{3}\sqrt{2}k^2-2a=0\\ a^2-\frac{2}{3}k^2=0\end{cases}$$

となる。 $k>0$ であることから、これらの式を解くと $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

2

以下、数字 $-1, 1, 2$ をそれぞれ a, b, c 回取り出した場合を $\{a, b, c\}$ と書くことにする。

(1)

$S_3=2$ となるカードの取り出し方は $\{1, 1, 1\}$ のみである。これらのカードを引く順番は $3!$ 通りある。3回カードを引くときのカードの取り出し方は全部で 3^3 通りあるから、求める確率は

$$\frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

となる。

(答) $\frac{2}{9}$

(2)

$S_6=2$ となるカードの取り出し方は $\{3, 1, 2\}, \{2, 4, 0\}$ である。

[1] $\{3, 1, 2\}$ のとき

カードの引く順番は

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \text{ 通り}$$

ある。

[2] $\{2, 4, 0\}$ のとき

カードの引く順番は

$${}_6C_2 \text{ 通り}$$

ある。

[1], [2] の場合は互いに排反である。6回カードを引くときのカードの取り出し方は全部で 3^6 通りあるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_6C_1 \times {}_5C_2 + {}_6C_2}{3^6} &= \frac{75}{729} \\ &= \frac{25}{243} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{25}{243}$

(3)

$\{x, y, z\}$ であるとき、 $S_n=2$ となるのは

$$-x+y+2z=2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる場合である。また、 $n=6m$ となるのは

$$x+y+z=6m \quad \cdots \textcircled{2}$$

のときである。①, ②より

$$z=2m+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。 y は非負の整数であることより

$$z=2m+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y$$

$$\leq 2m+\frac{2}{3}$$

$$< 2m+1$$

である。さらに、 z が非負の整数であることより、 z の取り得る値の範囲は

$$0 \leq z \leq 2m \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。また、③より

$$y=3m+1-\frac{3}{2}z \quad \cdots \textcircled{5}$$

となるが、 y, z が整数であることより、 $\frac{3}{2}z$ は整数でなければならず、 z は偶数である。よ

って、④と合わせて $z=2l$ ($0 \leq l \leq m$) と書くことができる。このとき、⑤より

$$y=3(m-l)+1$$

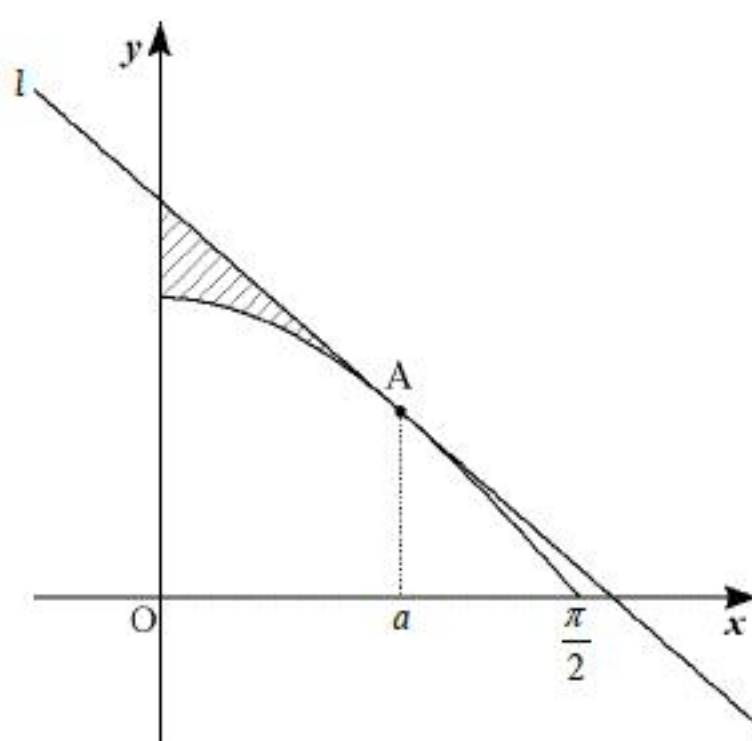
となり、②より

$$x=3m+l-1$$

となる。よって、 l の値と (x, y, z) の値の組は一対一対応するため、 (x, y, z) のとり得る値の組の個数は l の取り得る値の個数と一致する。 l の取り得る値の範囲が $0 \leq l \leq m$ であることより、 (x, y, z) のとり得る値の組の個数は $m+1$ 個となる。

(答) $m+1$ 個

3
(1)



$y = \cos x$ について $y' = -\sin x$ であることより、曲線 $y = \cos x$ 上の点 $A(a, \cos a)$ における接線 l の方程式は

$$y = -(x-a)\sin a + \cos a$$

となる。よって、 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \{-(x-a)\sin a + \cos a - \cos x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 \sin a + (a \sin a + \cos a)x - \sin x \right]_0^a \\ &= \left(\frac{1}{2}a^2 - 1 \right) \sin a + a \cos a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \left(\frac{1}{2}a^2 - 1 \right) \sin a + a \cos a$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 1^2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} S(a+h) &= \left\{ \frac{1}{2}(a+h)^2 - 1 \right\} \sin(a+h) + (a+h) \cos(a+h) \\ &= \left\{ \left(\frac{a^2+h^2}{2} - 1 \right) + ah \right\} \sin(a+h) + (a+h) \cos(a+h) \\ S(a-h) &= \left\{ \frac{1}{2}(a-h)^2 - 1 \right\} \sin(a-h) + (a-h) \cos(a-h) \\ &= \left\{ \left(\frac{a^2+h^2}{2} - 1 \right) - ah \right\} \sin(a-h) + (a-h) \cos(a-h) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \sin(a+h) + \sin(a-h) &= 2 \sin a \cos h \\ \sin(a+h) - \sin(a-h) &= 2 \sin h \cos a \\ \cos(a+h) + \cos(a-h) &= 2 \cos a \cos h \\ \cos(a+h) - \cos(a-h) &= -2 \sin a \sin h \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} S(a+h) + S(a-h) &= (a^2 + h^2 - 2) \sin a \cos h + 2ah \cos a \sin h + 2a \cos a \cos h - 2h \sin a \sin h \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S(a+h) + S(a-h) - 2S(a) &= \left\{ (a^2 - 2) \sin a + 2a \cos a \right\} (\cos h - 1) + h^2 \sin a \cos h + 2h \sin h (a \cos a - \sin a) \end{aligned}$$

となるから、求める極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (S(a+h) + S(a-h) - 2S(a)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left\{ (a^2 - 2) \sin a + 2a \cos a \right\} \frac{\cos h - 1}{h^2} + \sin a \cos h + 2(a \cos a - \sin a) \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= \left\{ (a^2 - 2) \sin a + 2a \cos a \right\} \times \left(-\frac{1}{2} \right) + \sin a \times 1 + 2(a \cos a - \sin a) \times 1 \\ &= -\frac{1}{2} a^2 \sin a + a \cos a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{2} a^2 \sin a + a \cos a$$

(1)

$$f(x) = e^{-x-1}$$

について

$$g(x) = x - f(x)$$

とおく。このとき

$$g(0) = -e^{-1} < 0$$

$$g(1) = 1 - e^{-2} > 0$$

であることから、中間値の定理より $g(\beta) = 0$ を満たす実数 β が $0 < \beta < 1$ の範囲に存在する。

さらに

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - f'(x) \\ &= 1 + e^{-x-1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より、 $g(x)$ は単調増加関数であることから、 $g(\beta) = 0$ を満たす実数 β はただ 1 つ存在する。

よって、方程式 $g(x) = 0$ 、つまり、 $x = f(x)$ はただ 1 つの解をもつ。

(証明終)

(2)

(1) の方程式の解が α であるとき

$$f(\alpha) = \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。また、(1) より $\textcircled{1}$ を満たす α は

$$0 < \alpha < 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

の範囲にただ 1 つ存在する。まず

$$\text{命題「全ての自然数 } n \text{ について } a_n \neq \alpha \text{ である} \quad \dots (*)$$

を背理法を用いて示す。 $a_k = \alpha$ となる自然数 k が存在すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha \\ \Leftrightarrow f(a_{k-1}) &= \alpha \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ より $a_{k-1} = \alpha$ となる。よって、帰納的に考えて、 $a_k = a_{k-1} = \dots = a_1 = \alpha$ となる。しかし、 $a_1 = 1$ であることから $\alpha = 1$ となるが、これは $\textcircled{2}$ に反する。よって、仮定は誤りであり、命題 $(*)$ は真である。よって、全ての自然数 n について $a_n \neq \alpha$ である。関数 $f(x)$ は連続で微分可能だから平均値の定理より

$$f(a_n) - f(\alpha) = f'(c)(a_n - \alpha)$$

となる実数 c が a_n と α の間に存在する。よって

$$|f(a_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| |a_n - \alpha| \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで、 $f(x) = e^{-x-1} > 0$ より、全ての自然数 n について $a_n > 0$ であり、さらに、 $\textcircled{2}$ より $\alpha > 0$ であるから、 a_n と α の間に存在する c は $c > 0$ を満たす。よって

$$\begin{aligned} |f'(c)| &= |-e^{-c-1}| \\ &= e^{-c-1} \\ &< e^{-1} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \alpha| &= |f(a_n) - f(\alpha)| \\ &= |f'(c)| |a_n - \alpha| \\ &< \frac{1}{e} |a_n - \alpha| \end{aligned}$$

となるから

$$0 < |a_n - \alpha| < \frac{1}{e} |a_{n-1} - \alpha| < \dots < \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} |a_1 - \alpha| \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} |a_1 - \alpha| = 0$$

であるから、 $\textcircled{5}$ においてはさみうちの原理から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)