数　学

1～5ページ

注　意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません．
2. 試験開始後，ただちにページ数を確認し，落丁や印刷の不鮮明なものなどがあれば申し出なさい．
3. 解答は，別に配られる解答用紙の所定の場所に記入しなさい．
4. 解答時間は**75分間**です．
5. 受験番号を，解答用紙の所定欄に記入しなさい．
6. 試験終了後，**解答用紙のみを提出しなさい**．問題冊子は**持ち帰りなさい**．

1 以下の設問 (1) ～ (8) については，答えだけを解答欄に書きなさい．

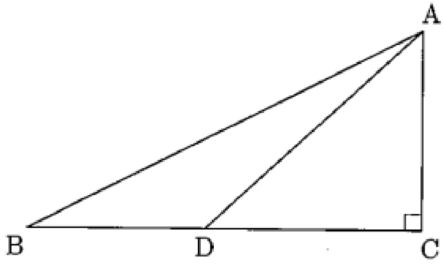
(1) つぎの式を計算して簡単にしなさい．

$$2\times 8^{-\frac{1}{6}}-\frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}+2^{-\frac{5}{2}}\log_2 8$$

(2) a は $a \geqq -3$ を満たす定数とする．放物線 $y=3x^2$ と直線 $y=2ax+2a+1$ が異なる 2 点を共有するような a の値の範囲を求めなさい．

(3) xy 座標平面上に点 A$(0,\ 5)$ と点 B$(8,\ 2)$ をとる．x 軸上に点 P を，A, B からの距離の和 AP + BP が最小になるようにとるとき，P の x 座標を求めなさい．

(4) AC = 2，$\angle$ABC = 30°，$\angle$ACB = 90° の直角三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D を CD = 2 となるようにとる．三角形 ABD の外接円を描いたとき，A と D を端点とし三角形 ADC の内部を通る弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ の長さを求めなさい．



(5)　実数 x，y は3つの不等式 $y \geqq 2x^2$，$y \leqq 3x+3$，$4x+y \leqq 17$ をすべて満たすとする．$x+y=k$ とおくとき，k のとり得る値の範囲を求めなさい．

(6)　原点Oの座標空間に四面体OABCがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．線分OCの中点をDとし，線分ABを2:3に内分する点をEとする．線分OEの延長線上に点Fを $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=5\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を満たすようにとり，DとFを線分で結ぶとき，DFと四面体の底面ABCとの交点をGとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表しなさい．

(7)　任意の自然数 n とある自然数 a について，

$3^{2n}-1=a(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})$ が成り立つことに注意すると，$3^{120}+7$ は a の倍数であることがわかる．このとき $\dfrac{3^{120}+7}{a}$ の桁数を求めなさい．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

(8)　原点Oの座標平面において，双曲線 $\dfrac{(x-2\sqrt{2})^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点Pから直線 $x=a$ に下した垂線をPHとし，$k=\dfrac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}}$ とおく．点Pの位置に無関係に k の値が一定となるときの a の値と，そのときの k の値を求めなさい．

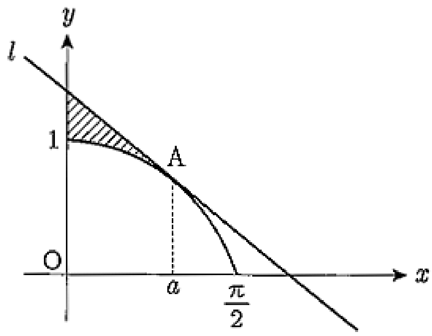
2　箱の中に，数字 -1，1，2 がそれぞれ1つずつ書かれた3枚のカードが入っている．異なるカードには異なる数字が書かれている．この箱の中から1枚のカードを取り出し，カードに書かれた数字を記録して箱に戻すことを n 回繰り返し行うとする．このとき，記録された n 個の数字の総和を S_n で表す．ただし，1枚のカードを取り出す事象はどれも同様に確からしいとし，(1)，(2) については答えだけを解答欄に書きなさい．

(1)　$n=3$ とする．$S_3=2$ となる確率を求めなさい．

(2)　$n=6$ とする．$S_6=2$ となる確率を求めなさい．

(3)　m を自然数とし，$n=6m$ かつ $S_n=2$ となる場合を考える．-1，1，2 が書かれたカードを取り出した回数を，それぞれ，x，y，z で表すとき x，y，z がとり得る値の組 $(x,\ y,\ z)$ はいくつあるか．m を用いた式で答えなさい．

3　座標平面上に曲線 $y=\cos x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ を描き，この曲線上に点 $\mathrm{A}(a,\ \cos a)$，$\left(\text{ただし，} 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$，をとる．この曲線上の点 A における接線を l とし，曲線と l と y 軸で囲まれる図形(図の斜線部分)の面積を $S(a)$ で表す．以下の問いに答えなさい．ただし，(1)，(2) については答えだけを解答欄に書きなさい．



(1)　$S(a)$ を求めなさい．

(2)　$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h-1}{h^2}$ を求めなさい．

(3)　$h>0$ を $0<a-h<\frac{\pi}{2}$，$0<a+h<\frac{\pi}{2}$ を満たすようにとる．つぎの極限値を求めなさい．

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2}\left(S(a+h)+S(a-h)-2S(a)\right)$$

4　関数 $f(x)=e^{-x-1}$ について，以下の問いに答えなさい．ただし，e は自然対数の底を表す．

(1)　方程式 $x=f(x)$ はただ 1 つの解をもつことを証明しなさい．

(2)　(1) の方程式の解を α で表す．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める．このとき，はさみうちの原理を用いて $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ が成り立つことを証明しなさい．