

1

【解答】

(1)	(2)	(3)	(4)
$-\frac{6}{5}<m<-1$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{10}{21}$	$(-9, 29)$
(5)	(6)	(7)	(8)
$a_n=\frac{2^{n-2}}{3\cdot 2^{n-2}-1}$	小数第117位	$\overline{OE}=\left(\frac{22}{9}, \frac{1}{3}\right)$	$2\cdot 5^n$

(1)

与えられた2次関数は下に凸の放物線である。このため、この2次関数のグラフがx軸の負の部分において異なる2点で交わる時、

$$\begin{cases} 2次関数の頂点のx, y座標が共に負 \\ 2次関数のx=0においてy座標が正 \end{cases}$$

の2つを同時に満たす。ここで、2次関数の方程式を平方完成し、さらに因数分解すると

$$\begin{aligned} y &= (x-m)^2 - m^2 + 5m + 6 \\ &= (x-m)^2 - (m-6)(m+1) \end{aligned}$$

となるため、上の条件は

$$\begin{cases} m < 0 \\ -(m-6)(m+1) < 0 \\ 5m+6 > 0 \end{cases}$$

と書き換えられる。これを整理すると

$$\begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \text{ または } 6 < m \\ -\frac{6}{5} < m \end{cases}$$

となる。よって、この条件を満たすmは

$$-\frac{6}{5} < m < -1$$

である。

(2)

与えられた放物線の方程式を平方完成すると

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

となるから、これをx方向に $\frac{1}{2}$ 、y方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動した放物線は

$$y = (x-1)^2 + \frac{5}{4}$$

となる。この放物線と直線y=xの共有点の座標は以下の方程式

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + \frac{5}{4} &= x \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

を満たすから、

$$x = \frac{3}{2}$$

である。これと直線の式よりy= $\frac{3}{2}$ となるから、共有点の座標は(x, y)= $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ である。

(3)

9個の球から4個の球を同時に取り出す取り出し方は ${}_9C_4$ 通りである。また、赤玉5個からと白玉4個から2個同時に取り出す取り出し方はそれぞれ ${}_5C_2, {}_4C_2$ 通りである。よって、求める確率は

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_9C_4} = \frac{10}{21}$$

となる。

(4)

線分ABおよび線分BCの方向ベクトルを求めると、

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (1, 4) - (-2, 3) = (3, 1) \\ \overline{BC} &= (5, 6) - (1, 4) = (4, 2) \end{aligned}$$

であるから、垂直二等分線lおよびmの方向ベクトルは

直線l: (1, -3)
直線m: (1, -2)

となる。また、線分AB, BCの中点をそれぞれ点D, Eとし、座標を求めると、

点Dの座標: $\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$
点Eの座標: $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (3, 5)$

となる。したがって、垂直二等分線l, m上の点は、実数s, tを用いてそれぞれ

$$\left(-\frac{1}{2} + t, \frac{7}{2} - 3t\right), (3 + s, 5 - 2s)$$

と表せる。このとき、lとmの交点の座標を求めると、

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + t = 3 + s \\ \frac{7}{2} - 3t = 5 - 2s \end{cases}$$

を解くことでs=-12, t=- $\frac{17}{2}$ となることから、

$$(x, y) = (-9, 29)$$

となる。

(5)

与えられた漸化式

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 1} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

より、 $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} > 0$ であり、また $a_1 = 1$ であることから、帰納的に任意の自然数nについて $a_n > 0$ であることがわかる。よって、①の逆数を考えると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2a_n}$$

となる。 $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと、①は

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

と書ける。これは

$$(b_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(b_n - 3)$$

と変形できるから、 b_n は

$$\begin{aligned} b_n - 3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - 3) \\ \therefore b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (1-3) + 3 = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

と求められる。ここから、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{b_n} \\ &= \frac{1}{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \\ &= \frac{2^{n-2}}{3 \cdot 2^{n-2} - 1} \end{aligned}$$

となる。

(6)

$\left(\frac{1}{6}\right)^{150}$ を小数で表したとき、小数第n位に初めて0でない数字が現れるとすると、

$$10^{-n} \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{150} < 10^{-(n-1)}$$

を満たす。この不等式の各辺について常用対数をとると、

$$-n \leq \log_{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{150} < -(n-1)$$

となるが、

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{150} &= 150 \log_{10} \left(\frac{1}{6}\right) \\ &= -150 \log_{10} 6 \\ &= -150 (\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \end{aligned}$$

と変形でき、与えられた条件より $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ であることから、

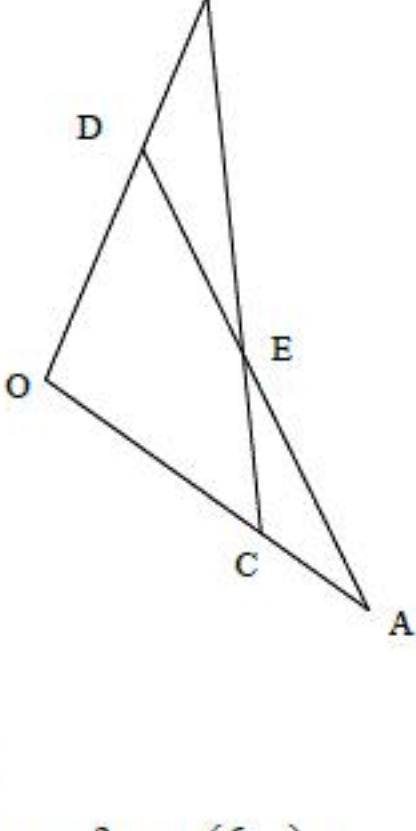
$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{150} &= -150 (0.3010 + 0.4771) \\ &= -116.715 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$-n \leq -116.715 < -(n-1)$$

より、これを満たす自然数nはn=117である。

(7)



ベクトル $\overline{OC}, \overline{OD}$ はそれぞれ

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{OA} = \left(\frac{8}{3}, -2\right), \overline{OD} = \frac{3}{5}\overline{OB} = \left(\frac{6}{5}, 3\right)$$

と表せる。また、ベクトル $\overline{CB}, \overline{DA}$ はそれぞれ

$$\overline{CB} = \left(-\frac{2}{3}, 7\right), \overline{DA} = \left(\frac{14}{5}, -6\right)$$

となる。ここから、ベクトル $\overline{OE}$ は実数s, tを用いて

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OC} + s\overline{CB} \\ &= \left(\frac{8}{3}, -2\right) + s\left(-\frac{2}{3}, 7\right) \\ &= \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}s, -2 + 7s\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \overline{OD} + t\overline{DA} \\ &= \left(\frac{6}{5}, 3\right) + t\left(\frac{14}{5}, -6\right) \\ &= \left(\frac{6}{5} + \frac{14}{5}t, 3 - 6t\right) \end{aligned}$$

と2通りに表すことができる。したがって、s, tに関する連立方程式

$$\begin{cases} \frac{8}{3} - \frac{2}{3}s = \frac{6}{5} + \frac{14}{5}t \\ -2 + 7s = 3 - 6t \end{cases}$$

を解くと、s= $\frac{1}{3}, t = \frac{4}{9}$ となるから、 $\overline{OE} = \left(\frac{22}{9}, \frac{1}{3}\right)$ である。

(8)

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は、 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす角 α を用いて

$$A = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

と表せるから、行列Aの表す一次変換は、原点の周りの角度 α の回転と $\sqrt{5}$ 倍の拡大を表す。このため (x_n, y_n) が表す点を P_n とし、(1, 1)が表す点を P_0 とすると、

$$|\overline{OP_n}| = (\sqrt{5})^n |\overline{OP_0}|$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} |\overline{OP_0}| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ |\overline{OP_n}|^2 &= (x_n)^2 + (y_n)^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (x_n)^2 + (y_n)^2 &= |\overline{OP_n}|^2 \\ &= \left\{ (\sqrt{5})^n |\overline{OP_0}| \right\}^2 \\ &= 2 \cdot 5^n \end{aligned}$$

となる。

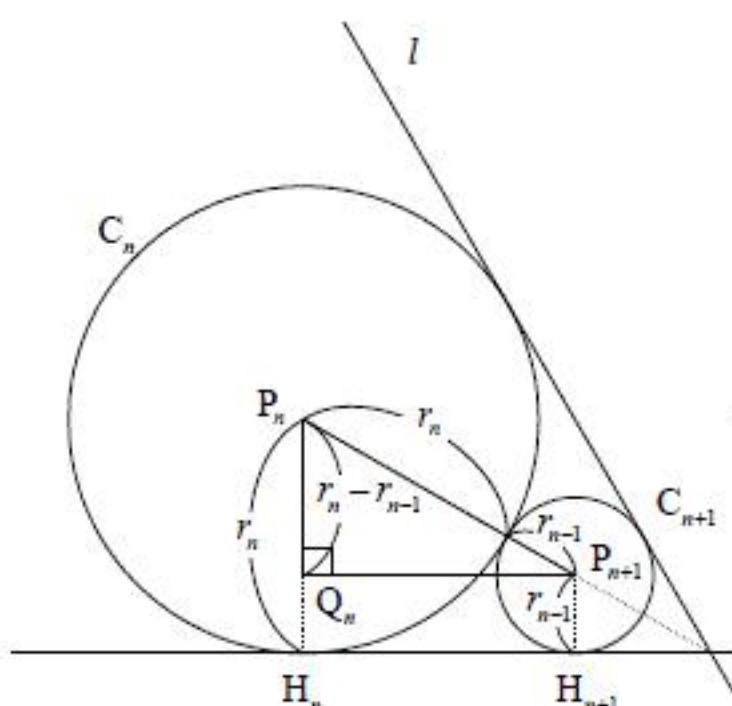
2

【解答】

$$(1) \quad l: y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$$

$$(2) \quad \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

(3)



上図のように円 C_n の半径を r_n 、中心を P_n 、中心から x 軸に下ろした垂線の足を H_n とし、 P_{n+1} から $P_n H_n$ に下ろした垂線の足を Q_n とする。 $\angle P_n P_{n+1} Q_n$ は 30° なので、直角三角形の辺の長さの比から r_n と r_{n+1} が満たすべき式は

$$r_n + r_{n+1} = 2 \cdot (r_n - r_{n+1})$$

となる。これを解いて、

$$r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$$

となるから、円 C_n の面積 S_n は、円 C の面積を S_0 とすれば

$$S_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n S_0$$

となる。この等比級数の無限和は、公比が $\frac{1}{9}$ (< 0) であることから収束し、

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = S_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\pi}{8}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{8}$

【解説】

(1)

2 点 $B(1 - \sqrt{3}, 0)$ 、 $P(1, 1)$ を通る直線の方程式を求めると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-0}{1-(1-\sqrt{3})}(x-1)+1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となるから、点 A の座標はある実数 s ($s > 1$) を用いて

$$A\left(s, \frac{1}{\sqrt{3}}s + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

と書ける。ここで、点 A が円 C 上の点であることから、

$$\begin{aligned} (s-1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}s + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)(s-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (s-1)^2 &= \frac{3}{4} \\ \therefore s &= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となるが、 $s > 1$ より $s = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、

$$A\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

と分かる。直線 BP は円 C の中心 $P(1, 1)$ を通ることから、直線 BP と接線 l は点 A で直交する。

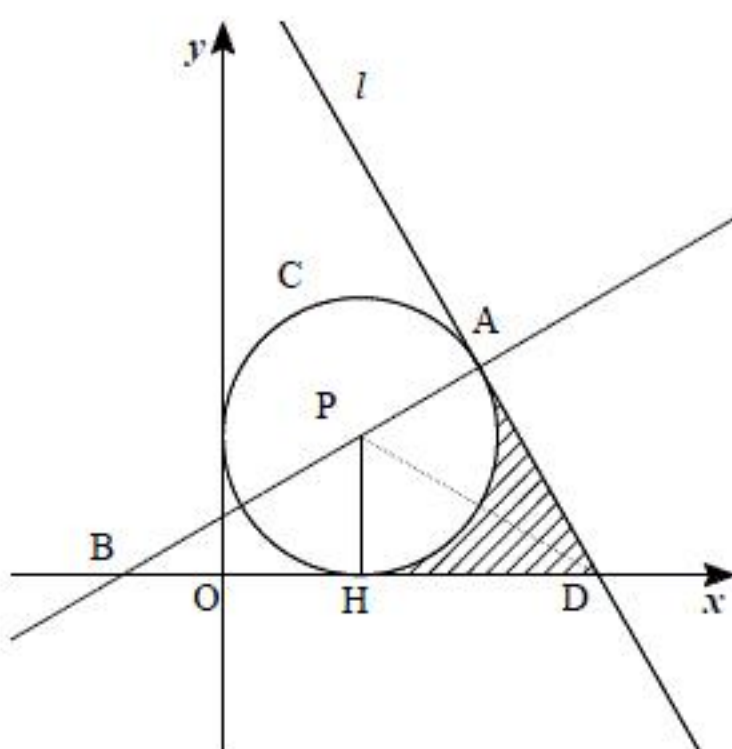
直線 BP の傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であることから、直線 l の傾きは $-\sqrt{3}$ である。以上より、直線 l は点

$$A\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ を通り、傾きが } -\sqrt{3} \text{ の直線であるから、その方程式は}$$

$$l: y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$$

となる。

(2)



上図のように点 P から x 軸に下ろした垂線の足を H 、 l と x 軸との交点を D とすると、

$$\triangle PHD \equiv \triangle PAD$$

が成り立つ。また、直線 AB の傾きは $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、この直線と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{6}$ であるから、

$$\angle HPA = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

である。したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} 2 \cdot \triangle PHD - (\text{扇形 PHA の面積}) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

3

【解答】

(1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(2)

ベクトル $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$ を, それぞれ $\overrightarrow{EA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{f}$, $\overrightarrow{EH} = \vec{h}$ とする。

平面 EBJ 上の点 K は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EK} &= s\overrightarrow{EB} + t\overrightarrow{EJ} \\ &= s(\vec{a} + \vec{f}) + t\left(\vec{f} + \frac{1}{3}\vec{h}\right) \\ &= s\vec{a} + (s+t)\vec{f} + \frac{t}{3}\vec{h}\end{aligned}$$

と書ける。一方, 線分 FD 上の点 K は, 同様に実数 k を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EK} &= \overrightarrow{EF} + k\overrightarrow{FD} \\ &= \vec{f} + k(\vec{a} + \vec{h} - \vec{f}) \\ &= k\vec{a} + (1-k)\vec{f} + k\vec{h}\end{aligned}$$

と書ける。ベクトル $\vec{a}$, $\vec{f}$, $\vec{h}$ は一次独立なので, 係数を比較して以下の等式を得る。

$$\begin{cases} s = k \\ s + t = 1 - k \\ \frac{1}{3}t = k \end{cases}$$

これを解くと $k = \frac{1}{5}$, $s = \frac{1}{5}$, $t = \frac{3}{5}$ となる。よって $\overrightarrow{EK}$ の式に代入すれば,

$$\overrightarrow{EK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EJ}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EJ}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{40}$

【解説】

(1)

解答と同様にベクトル $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH}$ を, それぞれ $\overrightarrow{EA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{f}$, $\overrightarrow{EH} = \vec{h}$ とする。このとき, ベクトル $\overrightarrow{EJ}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG} \\ &= \vec{f} + \frac{1}{3}\vec{h}\end{aligned}$$

と表される。ここで, ベクトル $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EB}$ によって張られる三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{EJ}|^2 |\overrightarrow{EB}|^2 - (\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{EB})^2}$$

で与えられる。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{EJ}|^2 &= |\vec{f}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{h}|^2 + \frac{2}{3}\vec{f} \cdot \vec{h} \\ |\overrightarrow{EB}|^2 &= |\vec{f}|^2 + |\vec{a}|^2 + 2\vec{f} \cdot \vec{a} \\ \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{EB} &= \left(\vec{f} + \frac{1}{3}\vec{h}\right) \cdot (\vec{f} + \vec{a}) = |\vec{f}|^2 + \frac{1}{3}\vec{f} \cdot \vec{h} + \vec{f} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

である。 $\vec{f} \cdot \vec{h} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$, $\vec{f} \cdot \vec{a} = 0$ なので

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{EJ}|^2 &= 4 + \frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 7 \\ |\overrightarrow{EB}|^2 &= 4 + 1 = 5 \\ \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{EB} &= 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5\end{aligned}$$

であることから, S の式に代入して,

$$S = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

となる。

(3)

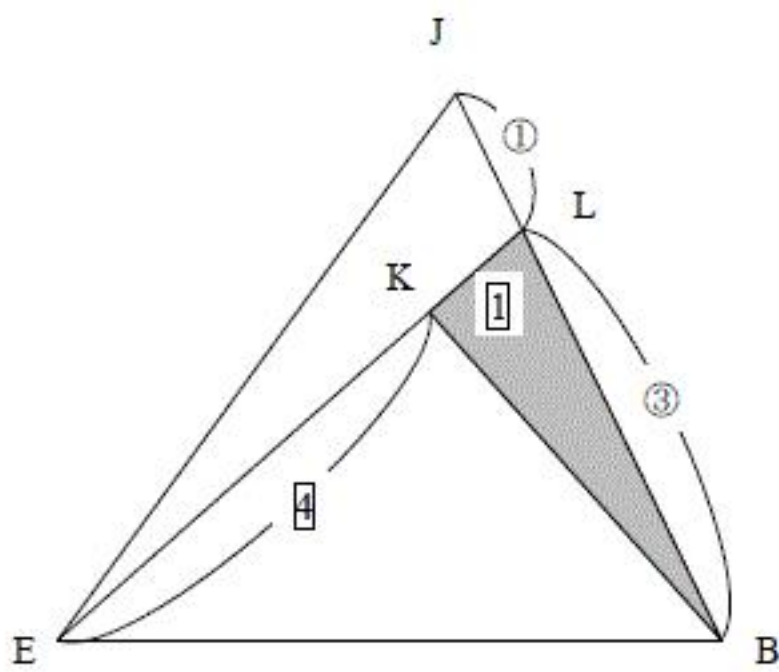
(2)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EK} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EJ} \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1 \cdot \overrightarrow{EB} + 3 \cdot \overrightarrow{EJ}}{3+1}\end{aligned}$$

と変形できる。このとき,

$$\overrightarrow{EL'} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{EB} + 3 \cdot \overrightarrow{EJ}}{3+1}$$

とおくと, 点 L' は線分 EK の延長上にあり, かつ線分 BJ 上に存在する点であることから, これは点 L に一致する。ここで, 四面体 $KFBL$ と四面体 $EFBJ$ の体積比は, 四面体の頂点を F とすれば, それぞれの底面である三角形 KBL および三角形 EBJ が同一平面上に存在することから, 底面積の比に一致する。



上図より,

$$(\text{三角形 KBL の面積}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot (\text{三角形 EBJ の面積})$$

と分かる。また, 四面体 $EFBJ$ の体積は, 点 B を頂点とし, 三角形 EFJ を底面とすれば,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot (\text{三角形 EFJ の面積}) \cdot BF &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ\right) \cdot 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

となる。したがって, 求める体積は,

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{40}$$

である。

4

(1)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx
 \end{aligned}$$

と書ける。ここで $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\theta} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\
 \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

となり、積分範囲は以下のように変化する。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

となる。よって $I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ となる。

また、 $0 \leq x \leq 1$ において、 $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$ であるから、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 0 dx &\leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx \\
 \Rightarrow 0 &\leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}
 \end{aligned}$$

となる。これと $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ より、はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

(2)

与えられた式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 I_n - I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{2(n+2)}}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1-x^4)}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+2}) dx \\
 &= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \\
 &= \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}
 \end{aligned}$$

となる。この式の n を $2n-1$ と置き換えると

$$I_{2n-1} - I_{2n+1} = \frac{2}{(4n-1)(4n+1)}$$

となることから、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{2}{(4k-1)(4k+1)} &= \sum_{k=1}^n (I_{2k-1} - I_{2k+1}) \\
 &= I_1 - I_{2n+1}
 \end{aligned}$$

と書ける。したがって、(1)の結果より $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ であることから、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(4k-1)(4k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 - I_{2n+1}) \\
 &= I_1 - 0 \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad I_n - I_{n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(4k-1)(4k+1)} = 1 - \frac{\pi}{4}$$