

数 学

1 ～ 5 ページ

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、ただちにページ数を確認し、落丁や印刷の不鮮明なものなどがあれば申し出なさい。
3. 解答は、別に配られる解答用紙の所定の場所に記入しなさい。
4. 解答時間は75分間です。
5. 受験番号を、解答用紙の所定欄に記入しなさい。
6. 試験終了後、解答用紙のみを提出しなさい。問題冊子は持ち帰りなさい。

1 以下の設問 (1) ～ (8) については、答えだけを解答欄に書きなさい。

(1) m を定数とする．2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 5m + 6$ のグラフと x 軸の負の部分異なる 2 点で交わるとき，定数 m のとり得る値の範囲を求めなさい．

(2) 放物線 $y = x^2 - x + 2$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ ， y 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動して得られる放物線と直線 $y = x$ の共有点の座標を求めなさい．

(3) 赤玉 5 個と白玉 4 個，合計 9 個の玉が入っている袋から 4 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が 2 個，かつ，白玉が 2 個である確率を求めなさい．

(4) 座標平面上に 3 点 $A(-2, 3)$ ， $B(1, 4)$ ， $C(5, 6)$ をとり，線分 AB と線分 BC を引く． AB の垂直 2 等分線を l ， BC の垂直 2 等分線を m とするとき， l と m の交点の座標を求めなさい．

(5) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 1}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい.

(6) $\left(\frac{1}{6}\right)^{150}$ を小数で表したとき, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか.
ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(7) 原点 O の座標平面上に 2 点 $A(4, -3)$, $B(2, 5)$ をとり, 三角形 OAB を作る.
辺 OA を $2:1$ に内分する点を C , 辺 OB を $3:2$ に内分する点を D とする. 線分 BC と線分 AD を引き, その 2 つの線分の交点を E とするとき, $\overrightarrow{OE}$ を求めなさい. 答えは, 成分で表しなさい.

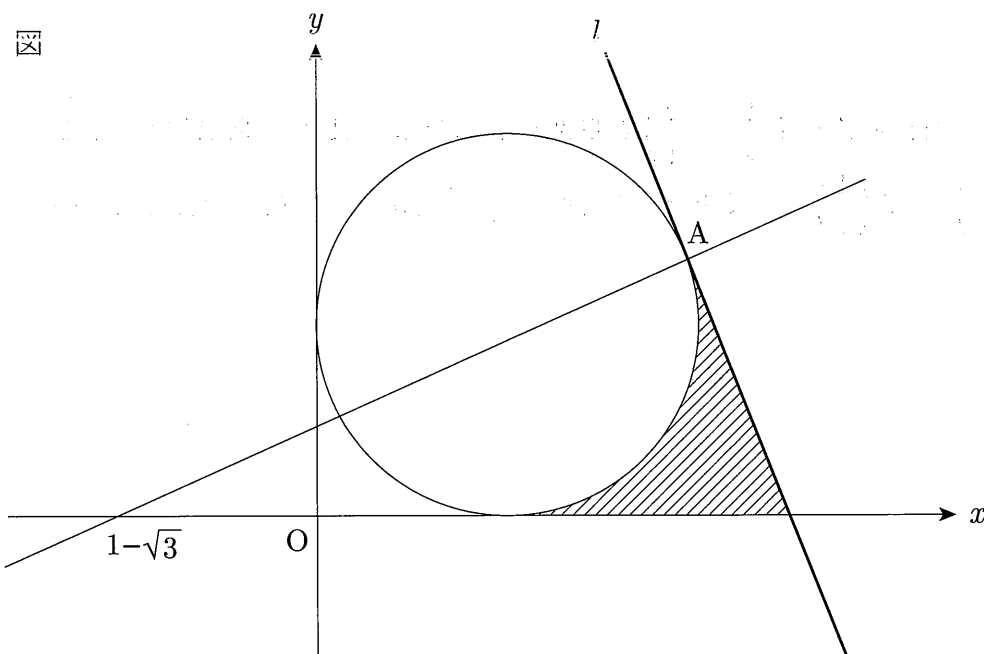
(8) 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ と自然数 n に対して A の n 乗 A^n を考える.
 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくとき, $(x_n)^2 + (y_n)^2$ を n を用いた式で表しなさい.

- 2 原点 O の座標平面上に円 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を描き、2 点 $(1-\sqrt{3}, 0)$, $(1, 1)$ を通る直線と円 C の交点のうち、 x 座標が 1 より大きいほうの点を A とする (図を参照). また、点 A における円 C の接線を l とする. 以下の問いに答えなさい. ただし、(1), (2) については答えだけを解答欄に書きなさい.

(1) l の方程式を求めなさい.

(2) 図の斜線部分の面積を求めなさい.

- (3) l と x 軸の両方に接して、かつ、円 C と外接する円のうち、半径が円 C の半径よりも小さいものを円 C_1 とする. 以下同様に、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 l と x 軸の両方に接して、かつ、円 C_n と外接する円のうち、半径が円 C_n の半径よりも小さいものを円 C_{n+1} とする. いま、円 C_n の面積を S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) で表すとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めなさい.



- 3 平行六面体 $ABCD-EFGH$ は、 $AB = 2$, $AD = 3$, $AE = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BAE = 90^\circ$, $\angle DAE = 90^\circ$ をすべて満たしている. 辺 FG を $1:2$ に内分する点を J とし、3 点 E, B, J を頂点とする三角形 EBJ を作る時、以下の問いに答えなさい. ただし、(1), (3) については答えだけを解答欄に書きなさい.

(1) 三角形 EBJ の面積を求めなさい.

(2) 三角形 EBJ の面と線分 FD の交点を K とする. $\overrightarrow{EK}$ を $\overrightarrow{EB}$ と $\overrightarrow{EJ}$ を用いて表しなさい.

(3) (2) の線分 EK の延長と線分 BJ との交点を L とする. 4 点 K, F, B, L を頂点とする四面体 $KFBL$ の体積を求めなさい.

4 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$ を考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) I_1 を求めなさい. さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めなさい.

(2) $I_n - I_{n+2}$ を n の分数式で表しなさい. さらに, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-1)(4n+1)}$ を求めなさい.