

【1】

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5	
	2	3	3	2	1	
(2)	6	7	8			
	3	1	5			
(3)	9	10	11	12	13	
	4	4	2	5	3	
(4)	14	15	16	17	18	19
	1	6	1	9	3	6

〔解説〕

(1)

与式を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{12}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}} &= \frac{12(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})} \\
 &= \frac{12(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{3})^2-7} \\
 &= \frac{12(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{4\sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{3}(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}) \\
 &= 2\sqrt{3}+3-\sqrt{21}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

三角形 ABC について、余弦定理より、

$$\begin{aligned}
 CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \angle B \\
 \Leftrightarrow CA^2 &= 2^2 + (1+\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow CA^2 &= 5 \\
 \therefore CA &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、正弦定理より、三角形 ABC の外接円の半径を R とおくと、

$$\begin{aligned}
 2R &= \frac{CA}{\sin \angle B} \\
 \Leftrightarrow R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{15}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + mx - 2m + 4 \\
 &= \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}m^2 - 2m + 4
 \end{aligned}$$

とおくと、曲線 $y=f(x)$ は $x=-\frac{m}{2}$ を軸とする 2 次関数を表す。したがって、2 次方程式

$x^2 + mx - 2m + 4 = 0$ が $-1 < x < 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つための条件は、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} -\frac{1}{4}m^2 - 2m + 4 < 0 \\ -1 < -\frac{m}{2} < 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} m^2 + 8m - 16 > 0 \\ 0 < m < 2 \\ -3m + 5 > 0 \\ -2m + 4 > 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} m < -4 - 4\sqrt{2}, -4 + 4\sqrt{2} < m \\ 0 < m < 2 \\ m < \frac{5}{3} \\ m < 2 \end{cases} \\
 \therefore &-4 + 4\sqrt{2} < m < \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

(4)

積分値 $\int_0^1 (ax^2 + x - a^2) dx$ を整理すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (ax^2 + x - a^2) dx &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}x^2 - a^2x \right]_0^1 \\
 &= -a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2} \\
 &= -\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{19}{36}
 \end{aligned}$$

となるから、与えられた積分値は $a = \frac{1}{6}$ のとき最大値 $\frac{19}{36}$ をとる。

【2】

【解答】

(1)	20	21	
	1	6	
(2)	22	23	24
	3	7	3
(3)	25	26	
	2	7	
(4)	27	28	
	7	0	

【解説】

(1)

真数条件より、

$$2x+3>0 \text{ かつ } 5x^2+5x+15>0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} 5x^2+5x+15 &= 5\left(x^2+x+3\right) \\ &= 5\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 x のとりうる範囲は

$$2x+3>0 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$$

である。この範囲のもとで与えられた不等式を解くと、

$$\begin{aligned} \log_3(2x+3) &> \log_9(5x^2+5x+15) \\ \Leftrightarrow \log_3(2x+3) &> \frac{1}{2}\log_3(5x^2+5x+15) \\ \Leftrightarrow 2\log_3(2x+3) &> \log_3(5x^2+5x+15) \\ \Leftrightarrow (2x+3)^2 &> (5x^2+5x+15) \\ \Leftrightarrow x^2-7x+6 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-6) &< 0 \\ \therefore 1 < x < 6 \end{aligned}$$

である。

(2)

与えられた曲線の方程式は

$$\begin{aligned} x^2+y^2-12x-2y+33 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

と変形できるから、これは中心 $(6,1)$ 、半径 2 の円を表す。この円と直線 $y=\frac{1}{6}x+k$ が接する

ための条件は、円の中心 $(6,1)$ と直線 $y=\frac{1}{6}x+k \Leftrightarrow x-6y+6k=0$ の距離が円の半径 2 に等

しくなることであるから、このとき k の値は

$$\begin{aligned} \frac{|1\cdot 6-6\cdot 1+6k|}{\sqrt{6^2+1^2}} &= 2 \\ \Leftrightarrow |k| &= \frac{\sqrt{37}}{3} \\ \therefore k &= \frac{\sqrt{37}}{3} (\because k>0) \end{aligned}$$

である。

(3)

$a_n=\frac{1}{2^n}(n^2-23n-48)$ のとき、 $a_{n+1}-a_n$ を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\left\{(n+1)^2-23(n+1)+48\right\}-\frac{1}{2^n}(n^2-23n+48) \\ &= \frac{\left\{(n+1)^2-23(n+1)+48\right\}-2(n^2-23n+48)}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{n^2-25n-26}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{(n+1)(n-26)}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $n\geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ \Leftrightarrow -1 < n < 26 \\ \therefore 1 &\leq n \leq 25 \end{aligned}$$

と変形でき、同様に

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ \Leftrightarrow n &= -1, 26 \\ \therefore n &= 26 \\ a_{n+1} &< a_n \\ \Leftrightarrow n &< -1, 26 < n \\ \therefore n &\geq 27 \end{aligned}$$

となる。これより

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{26} = a_{27} > a_{28} > a_{29} > \cdots$$

が成り立つから、数列 $\{a_n\}$ の最大値を与える n のうち、最大のものは

$$n=27$$

である。

(4)

求める場合の数は、 5 種類の数字から重複を許して 4 個の数字を選ぶ選び方の総数に等しい。

これは、 4 個の○と 4 本の仕切り $|$ を 1 列に並べる場合の数に等しく、

$${}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=70 \text{通り}$$

である。

【3】

【解答】

(1)	29	30				
	3	0				
(2)	31	32	33	34	35	
	2	9	1	2	5	
(3)	36	37	38	39	40	41
	5	2	2	8	3	3

【解説】

(1)

$|\overline{AB}|^2, |\overline{AC}|^2, \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ の値は、それぞれ

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 4 + 4^2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{AC}|^2 &= |\vec{c} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{c}|^2 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 5 + 3^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= 4 - 4 - 5 + 3^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。よって、三角形 ABC の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{17 \cdot 8 - 4^2} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

点 L は線分 AB 上にあるから、 $\overline{OL}$ は実数 k を用いて

$$\overline{OL} = k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$$

と表される。ここで、 $\overline{OL} \cdot \overline{AB} = 0$ であるから、 k の値は

$$\begin{aligned} \overline{OL} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{k\vec{a} + (1-k)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4k - 9k + 16(1-k) - 4(1-k) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{12}{17} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\overline{OL} = \frac{12}{17}\vec{a} + \frac{5}{17}\vec{b}$ となる。ここで、点 N は線分 OL 上にあるから、 $\overline{ON}$ は実数 s を用いて

$$\begin{aligned} \overline{ON} &= s\overline{OL} \\ &= \frac{12}{17}s\vec{a} + \frac{5}{17}s\vec{b} \\ &= \frac{12}{17}s \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{17}s\vec{b} \\ &= \frac{24}{17}s\overline{OM} + \frac{5}{17}s\overline{OB} \end{aligned}$$

と表される。また、点 N は線分 BM 上にあるから、

$$\begin{aligned} \frac{24}{17}s + \frac{5}{17}s &= 1 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{17}{29} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、求める $\overline{ON}$ は

$$\overline{ON} = \frac{12}{29}\vec{a} + \frac{5}{29}\vec{b}$$

である。

(3)

$\overline{OH}$ は実数 p, q を用いて

$$\overline{OH} = (1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$$

と表せる。ここで、 $\overline{OH}$ は面 ABC と垂直であるから、 $\overline{OH} \cdot \overline{AB} = 0, \overline{OH} \cdot \overline{AC} = 0$ をともに満たす。よって、

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -5(1-p-q) + 12p - q &= 0 \\ \therefore 17p + 4q &= 5 \quad \quad \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-p-q)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4(1-p-q) + 4q &= 0 \\ \therefore p + 2q &= 1 \quad \quad \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。③、④の連立方程式を解くと、 p, q の値は

$$p = \frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}$$

となる。よって、 $\overline{OH}$ は

$$\overline{OH} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} |\overline{OH}|^2 &= \frac{1}{5^2} |2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{25} (36 + 16 + 36 + 16 + 16 + 40) \\ &= \frac{32}{5} \\ \therefore |\overline{OH}| &= \frac{4\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

となるから、四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overline{OH}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{30} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{5} = \frac{8}{3} \sqrt{3}$$

である。

[4]

(1)

$f(x) = x + \sqrt{4 - (x-1)^2}$ とおくと、 $0 \leq x < 3$ の範囲において、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{-2(x-1)}{2\sqrt{4-(x-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{4-(x-1)^2} - (x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \\ &= \frac{4-(x-1)^2 - (x-1)^2}{\sqrt{4-(x-1)^2}(\sqrt{4-(x-1)^2} + x-1)} \\ &= \frac{-2(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})}{\sqrt{4-(x-1)^2}(\sqrt{4-(x-1)^2} + x-1)} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x) = \sqrt{4-(x-1)^2} + x-1$ とおくと、 $g(x) = 0$ となるのは、

$$\begin{aligned} \sqrt{4-(x-1)^2} &= 1-x \\ \Leftrightarrow 4-(x-1)^2 &= (1-x)^2 \text{ かつ } 4-(x-1)^2 \geq 0 \text{ かつ } 1-x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{2} \text{ かつ } -1 \leq x \leq 1 \\ \Leftrightarrow x &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

となるときであるが、これは定義域 $0 \leq x \leq 3$ を満たさない。よって $g(x) \neq 0$ であり、 $x=2$

のとき $g(2) = 1 + \sqrt{3} > 0$ であること、かつ、 $g(x)$ は $0 \leq x \leq 3$ で連続であることから、

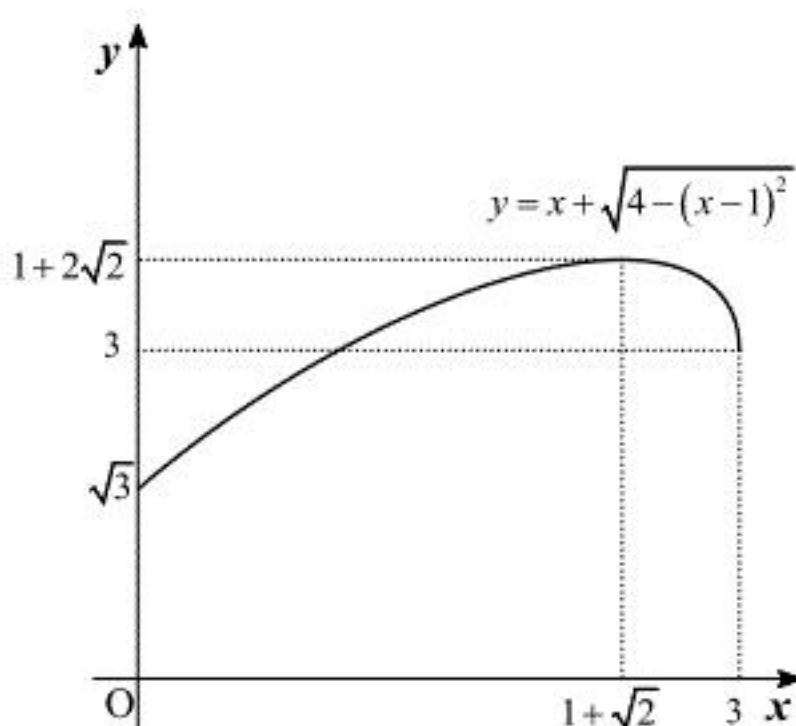
$0 \leq x \leq 3$ において

$$g(x) = \sqrt{4-(x-1)^2} + x-1 > 0$$

が成り立つ。これより、 $f'(x)$ の分母は $0 \leq x < 3$ において常に正であるから、 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0	...	$1+\sqrt{2}$	...	3
$f'(x)$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$1+2\sqrt{2}$	$\searrow$	3

増減表より、グラフの概形は下図のようになる。



(答) 前表, 前図

(2)

求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{ x + \sqrt{4-(x-1)^2} \right\} dx \\ &= \frac{9}{2} + \int_0^3 \sqrt{4-(x-1)^2} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_0^3 \sqrt{4-(x-1)^2} dx$ について、 $x-1 = 2\cos\theta$ と置換すると、

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta$$

であり、積分範囲は以下の表のように変化する。

x	0	$\rightarrow$	3
θ	$\frac{2}{3}\pi$	$\rightarrow$	0

したがって、この積分値を求めると、

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{4-(x-1)^2} dx &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 \sqrt{4-4\cos^2\theta} \cdot (-2\sin\theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2\theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sin \frac{4}{3}\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$S = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$$

である。

[5]

(1)

曲線 $y = \frac{1}{x}$ の方程式を x で微分すると、

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

となるから、点 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ における曲線 $y = \frac{1}{x}$ の法線の傾きを m とおくと、

$$m \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right) = -1$$

$$\therefore m = a^2$$

が成り立つ。よって、法線 n の方程式は

$$y - \frac{1}{a} = a^2(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = a^2x - a^3 + \frac{1}{a}$$

となる。ここで、法線 n と直線 $x = a$ との交点の座標は $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ であるから、 $x = a$ に関して直

線 n と線対称な位置にある直線は、傾きが $-a^2$ であり、点 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ を通る直線である。よって、

この直線の方程式は

$$y - \frac{1}{a} = -a^2(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = -a^2x + a^3 + \frac{1}{a}$$

となるから、

$$f(x) = -a^2x + a^3 + \frac{1}{a}$$

となる。このとき、曲線 $y = \frac{1}{x}$ と直線 $y = f(x)$ との交点の x 座標は

$$\frac{1}{x} = -a^2x + a^3 + \frac{1}{a}$$

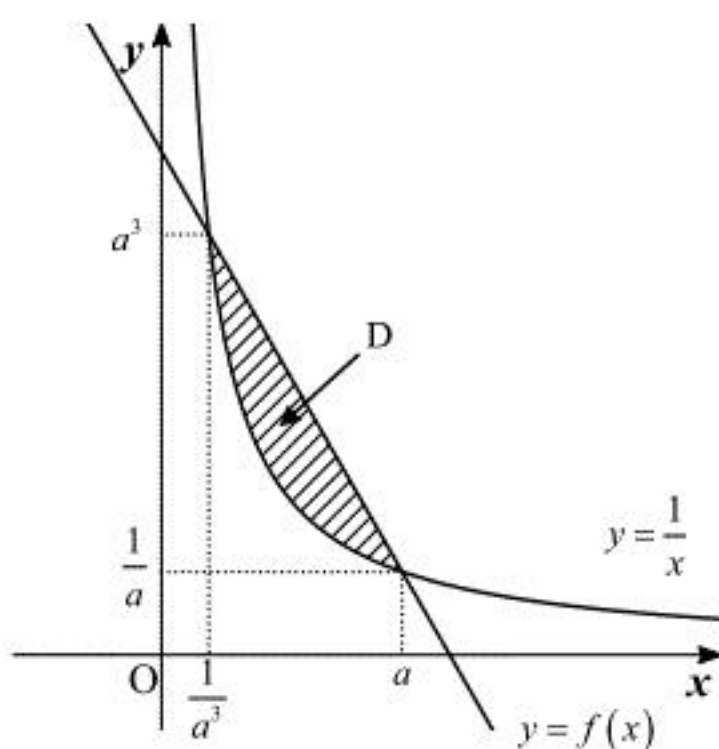
$$\Leftrightarrow a^2x^2 - \left(a^3 + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x - a)\left(a^2x - \frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\therefore x = a, \frac{1}{a^3}$$

となるから、交点の座標は $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(\frac{1}{a^3}, a^3\right)$ である。 $a > 1$ より、 $a > \frac{1}{a^3}$ であるから、領域 D

を図示すると下図のようになる。



(答) $f(x) = -a^2x + a^3 + \frac{1}{a}$, グラフ：前図

(2)

$x + y = k$ とおくと、 $y = -x + k$ と変形できる。よって、 $x + y$ の最大値および最小値は、直線 $y = -x + k$ が領域 D と共有点をもつときの y 切片の最大値および最小値と考えられる。まず、最大値について考える。直線 $y = f(x)$ の傾きは $-a^2$ であり、直線 $y = -x + k$ の傾き -1 と大小を比較すると

$$-1 > -a^2 \quad (\because a > 1)$$

であるから、 k は直線 $y = -x + k$ が点 $\left(\frac{1}{a^3}, a^3\right)$ を通るときに最大となり、このとき k の値は

$$k = \frac{1}{a^3} + a^3$$

となる。次に、最小値について考える。点 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ における $y = \frac{1}{x}$ の接線の傾きは $-\frac{1}{a^2}$ であり、

直線 $y = -x + k$ の傾き -1 と大小を比較すると

$$-\frac{1}{a^2} > -1 \quad (\because a > 1)$$

であるから、曲線 $y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a^3} < x < a\right)$ と直線 $y = -x + k$ が接するとき k は最小となる。ここ

で、接点の座標を $\left(b, \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a^3} < b < a\right)$ とおくと、

$$\begin{cases} \frac{1}{b} = -b + k \\ -\frac{1}{b^2} = -1 \end{cases}$$

$$\therefore b = 1, k = 2 \quad \left(\because \frac{1}{a^3} < b < a\right)$$

となるから、 k の最小値は 2 である。以上より、 $x + y$ の最小値と最大値はそれぞれ $2, a^3 + \frac{1}{a^3}$

である。

(答) 最小値： 2 ，最大値： $a^3 + \frac{1}{a^3}$