[1]

〔解答〕

(1)	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$
	2	3	9	2	3	5	2	7
(2)	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$				
	5	3	2	3				
(3)	$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$				
	1	4	6	2				
(4)	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$					
	3	3	2					

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3}$$
$$\alpha\beta=\frac{8}{3}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(-\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\frac{8}{3}\\&=-\frac{23}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\right)\\&=\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{23}{9}-\frac{8}{3}\right)\\&=\frac{235}{27}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\leqq x\leqq\frac{2}{3} \qquad \cdots ①$$

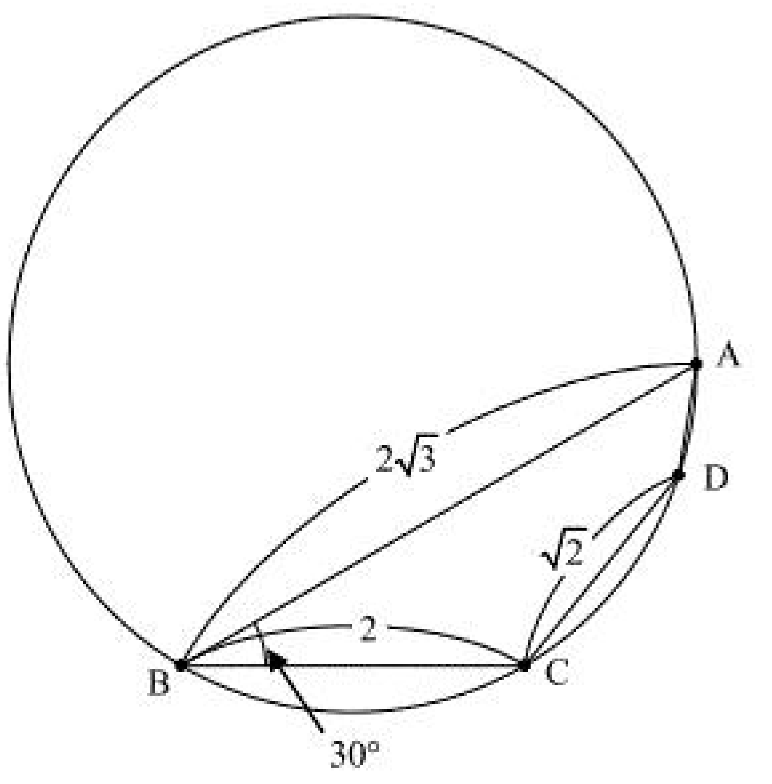
となる。また，

$$|3x+1|\leqq 4$$
$$\Leftrightarrow -4\leqq 3x+1\leqq 4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{3}\leqq x\leqq 1 \qquad \cdots ②$$

となる。従って，求める範囲は，①と②の共通範囲をとって，$-\frac{5}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}$ である。

(3)

与えられた図形を図示すると下図のようになる。



$\triangle$ ABC に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AC}^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\cdot\cos30^\circ$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{AC}^2=4$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{AC}=2\ (\because \mathrm{AC}>0)$$

が得られる。また，四角形 ABCD は円に内接するから，

$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ADC}=180^\circ$$
$$\Leftrightarrow \angle\mathrm{ADC}=150^\circ$$

が成り立つ。よって，AD $=x$ とおき，$\triangle$ ADC に余弦定理を用いると，

$$2^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot\cos150^\circ$$
$$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{6}x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{14}}{2}$$
$$\therefore \mathrm{AD}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}\ (\because \mathrm{AD}>0)$$

となる。

(4)

2 直線の方程式

$$\begin{cases}x-2y-4=0 & \cdots ③\\ 2x+y-3=0 & \cdots ④\end{cases}$$

を連立すると，③＋④×2 より，

$$5x-10=0\Leftrightarrow x=2$$

であり，これを③に代入して，

$$2-2y-4=0\Leftrightarrow y=-1$$

となる。したがって 2 直線の交点は $(2,-1)$ である。$m^2x+my-2m-9=0$ がこの点を通るから，

$$m^2\cdot2+m\cdot(-1)-2m-9=0$$
$$\Leftrightarrow 2m^2-3m-9=0$$
$$\Leftrightarrow (m-3)(2m+3)=0$$
$$\Leftrightarrow m=3,-\frac{3}{2}$$

となる。

[2]

〔解答〕

(1)	20	21	22	23	24	
	2	1	0	6	0	
(2)	25	26	27	28	29	30
	1	2	1	6	2	7
(3)	31	32	33	34	35	
	3	6	4	1	3	
(4)	36	37	38	39	40	
	4	1	7	6	8	

〔解説〕

(1)

7個の数字から6個を使うから，使わない1個の数字の種類に応じて場合分けを行う。

[1] 2を使わないとき

このとき，作れる6桁の整数の個数は，2を1個，3を3個，5を2個並べる場合の数であり，

$$\frac{6!}{1!3!2!}=60\,(\text{通り})$$

である。

[2] 3を使わないとき

同様に考えて，

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90\,(\text{通り})$$

である。

[3] 5を使わないとき

同様に考えて，

$$\frac{6!}{2!3!1!}=60\,(\text{通り})$$

である。

以上，[1], [2], [3]より，6桁の整数は，$60+90+60=210$ (通り)できる。また，作った6桁の整数が5の倍数になるのは，1の位の数字が5のときである。このようになる場合の数を，上と同様に場合分けを行って求める。

[1] 2を使わないとき

このとき，求める場合の数は，2を1個，3を3個，5を1個並べる場合の数であり，

$$\frac{5!}{1!3!1!}=20\,(\text{通り})$$

である。

[2] 3を使わないとき

同様に考えて，

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30\,(\text{通り})$$

である。

[3] 5を使わないとき

同様に考えて，

$$\frac{5!}{2!3!}=10\,(\text{通り})$$

である。

以上，[1], [2], [3]より，作った6桁の整数が5の倍数になるのは，$20+30+10=60$ (通り)である。

(2)

$$\begin{aligned} t&=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right)\\ &=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

である。$0\leqq x\leqq\pi$ より $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，t の取り得る値の範囲は $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。また，$t=\sin x+\cos x$ の両辺を2乗することで，

$$\begin{aligned} &t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\\ \Leftrightarrow\ &\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\end{aligned}$$

が得られる。したがって，

$$\begin{aligned} y&=\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x\\ &=\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)\\ &=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)(t+1)\\ &=\frac{1}{2}(t+1)^2(t-1)\end{aligned}$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt}&=\frac{1}{2}\cdot2(t+1)(t-1)+\frac{1}{2}(t+1)^2\\ &=\frac{1}{2}(t+1)\{2(t-1)+(t+1)\}\\ &=\frac{3}{2}(t+1)\left(t-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

であるから，y の増減は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$\frac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	
y		↘	極小	↗	

上図より，y は $t=\frac{1}{3}$ のとき，最小値

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)^2\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{16}{27}$$

をとる。

(3)

与式を X の方程式として表すと，

$$\begin{aligned} &2^{2x}-4\cdot2^{-x}=6\\ \Leftrightarrow\ &\left(2^x\right)^2-4\cdot\left(2^x\right)^{-1}=6\\ \Leftrightarrow\ &X^2-4X^{-1}=6\\ \Leftrightarrow\ &X^3-6X-4=0\ (\because X>0)\end{aligned}$$

である。これを解くと，

$$\begin{aligned} &X^3-6X-4=0\\ \Leftrightarrow\ &(X+2)\left(X^2-2X-2\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &X=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\\ \therefore\ &X=1+\sqrt{3}\ (\because X>0)\end{aligned}$$

となる。よって，与式の解は $x=\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)$ である。

(4)

$$\begin{aligned} &S_{n+2}-5S_{n+1}+4S_n=0\\ \Leftrightarrow\ &S_{n+2}-S_{n+1}=4\left(S_{n+1}-S_n\right)\end{aligned}$$

と変形できるので，$\{S_{n+1}-S_n\}$ は初項 $S_2-S_1=a_2$，公比4の等比数列である。したがって，

$$S_{n+1}-S_n=a_2\cdot4^{n-1}$$

が得られる。ここで，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから，

$$\begin{aligned} a_6&=S_6-S_5\\ &=a_2\cdot4^{5-1}\\ &=768\end{aligned}$$

となる。

［3］

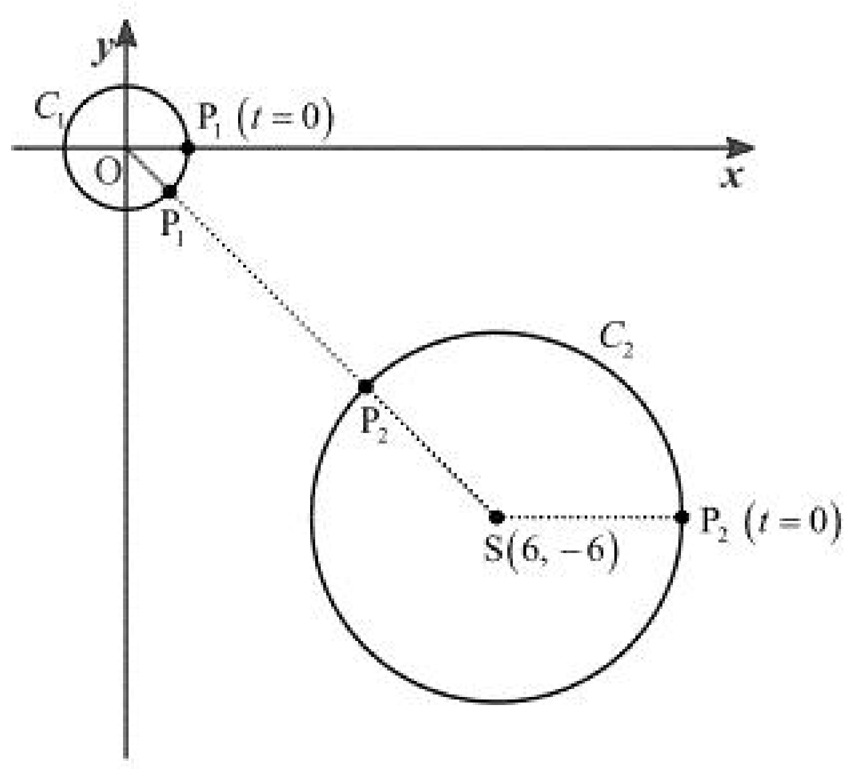
〔解答〕

(1)	$\boxed{41}$	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$	$\boxed{44}$	$\boxed{45}$	$\boxed{46}$	$\boxed{47}$	
	2	2	2	2	6	2	4	
(2)	$\boxed{48}$	$\boxed{49}$	$\boxed{50}$					
	1	5	2					
(3)	$\boxed{51}$	$\boxed{52}$	$\boxed{53}$	$\boxed{54}$	$\boxed{55}$	$\boxed{56}$	$\boxed{57}$	$\boxed{58}$
	1	7	9	1	7	8	3	3

〔解説〕

(1)

C_2の中心をSとおく。下図のように，P_1とP_2がC_1の中心とC_2の中心を結ぶ線分上に存在するときがあれば，そのときP_1とP_2の距離は最短となる。



P_1とP_2がそのような位置に存在するような$t\ (t \geqq 0)$が存在することを示す。t秒後に上図の状態になるための条件は，ある整数m, nが存在して，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\pi t = 2m\pi + \dfrac{7}{4}\pi \\ -\dfrac{7}{10}\pi t = 2n\pi + \dfrac{3}{4}\pi \end{cases} \qquad \cdots ①$$

が成立することである。

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4m + \dfrac{7}{2} \\ -\dfrac{7}{10}\pi\left(4m + \dfrac{7}{2}\right) = 2n\pi + \dfrac{3}{4}\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4m + \dfrac{7}{2} & \cdots ② \\ 7m + 5n + 8 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

である。$(m, n) = (1, -3)$は不定方程式③の解の1つとなる。このとき，tの値は，

$$t = 4 \cdot 1 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

であり，これは0以上だから，P_1とP_2がC_1の中心とC_2の中心を結ぶ線分上に存在するようなtは存在する。以上より，$\overline{P_1P_2}$は，P_1の座標が

$$\left(\cos\frac{7}{4}\pi, \sin\frac{7}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

のとき最小値をとり，その最小値は，OSの長さからC_1，C_2の半径を引いて

$$\overline{P_1P_2} = 6\sqrt{2} - 1 - 3 = 6\sqrt{2} - 4$$

である。

(2)

$7 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) + 8 = 0$が成立しているので，$7m + 5n + 8 = 0$の両辺から辺々引くと，

$$③ \Leftrightarrow 7(m-1) + 5(n+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 7(m-1) = -5(n+3)$$

が得られる。5と7は互いに素であるから，③の一般解は，

$$\begin{cases} m - 1 = 5k \\ n + 3 = -7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5k + 1 \\ n = -7k - 3 \end{cases} \quad (k\text{は整数})$$

である。このときのtの値は，②に代入して，

$$t = 4(5k+1) + \frac{7}{2} = 20k + \frac{15}{2}$$

が得られる。したがって，tが0以上でもっとも小さい値になるのは，

$$t \geqq 0$$

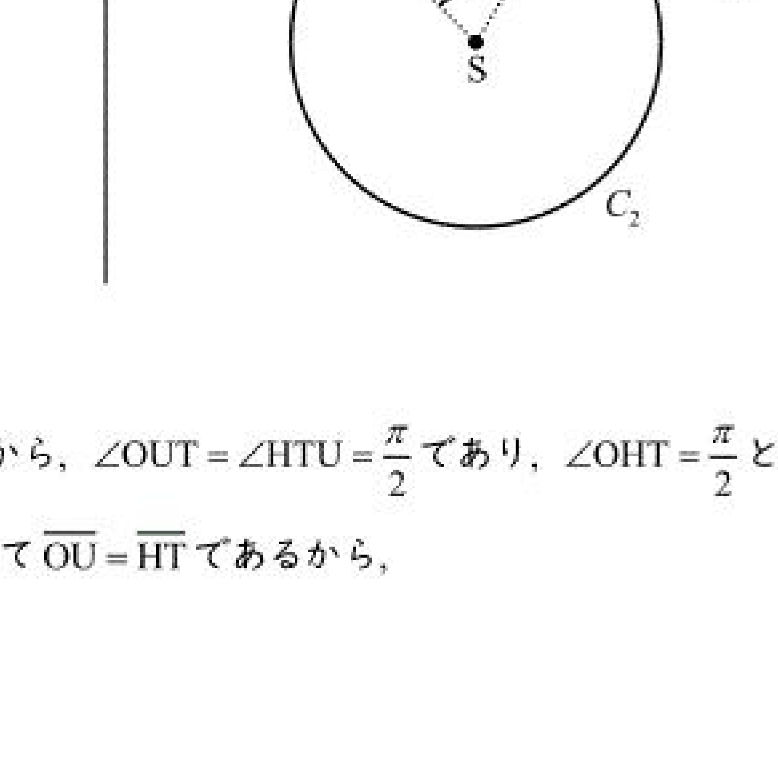
$$\Leftrightarrow 20k + \frac{15}{2} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow k \geqq -\frac{3}{8}$$

であることより$k=0$のときで，そのとき$t = \dfrac{15}{2}$となる。

(3)

lとC_1との接点をU，Oから線分STにおろした垂線の足をH，x軸上のx座標が正となる適当な点をVとおく。C_1，C_2，lと各点を図示すると下図のようになる。



lは2円の接線であるから，$\angle OUT = \angle HTU = \dfrac{\pi}{2}$であり，$\angle OHT = \dfrac{\pi}{2}$と合わせ四角形OHTUは長方形である。よって$\overline{OU} = \overline{HT}$であるから，

$$\begin{aligned} \overline{SH} &= \overline{ST} - \overline{HT} \\ &= \overline{ST} - \overline{OU} \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。また，$\overline{OS} = 6\sqrt{2}$であるから，三平方の定理より，

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OS}^2 - \overline{SH}^2} \\ &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

が得られる。以上より，

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\overline{OH}}{\overline{SH}} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

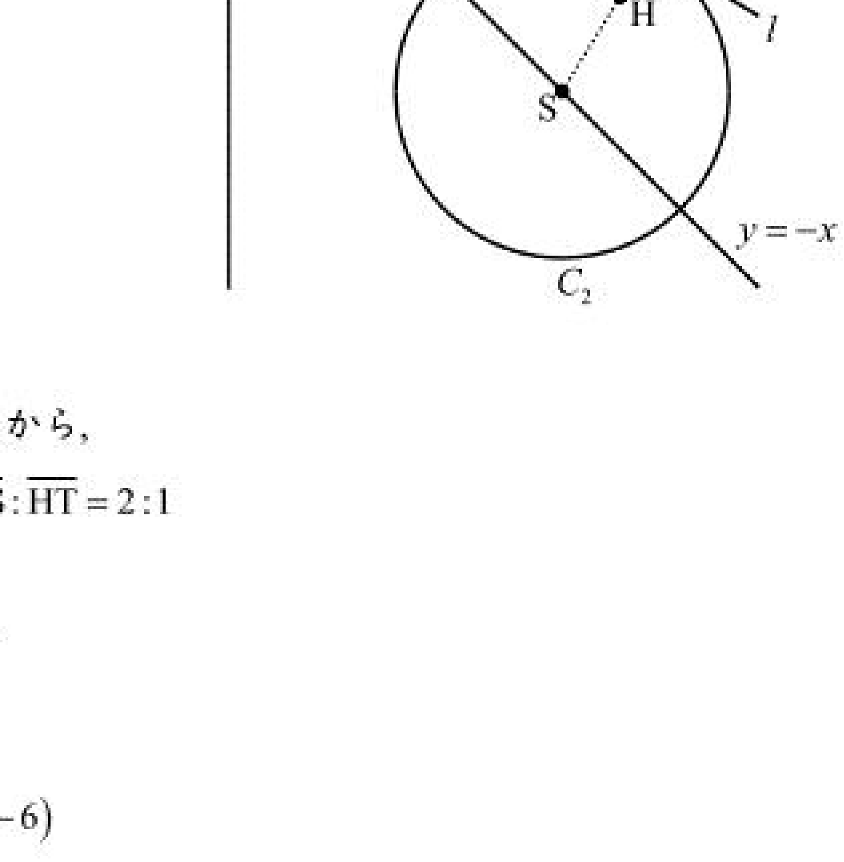
となる。また，$\angle SOH = \dfrac{\pi}{2} - \theta, \angle SOV = \dfrac{\pi}{4}$であるから，

$$\begin{aligned} \angle HOV &= \frac{\pi}{4} - \angle SOH \\ &= \theta - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

が得られる。lの傾きは，直線OHの傾きに等しく，

$$\begin{aligned} \tan\left\{-\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right)\right\} &= -\tan\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right) \\ &= -\frac{\tan\theta - \tan\frac{1}{4}\pi}{1 + \tan\theta\tan\frac{1}{4}\pi} \\ &= -\frac{\sqrt{17} - 1}{\sqrt{17} + 1}\ \left(\because \tan\theta = \sqrt{17}\right) \\ &= -\frac{\left(\sqrt{17} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{17} + 1\right)\left(\sqrt{17} - 1\right)} \\ &= \frac{-9 + \sqrt{17}}{8} \end{aligned}$$

となる。さらに，$y = -x$とlの交点をWとする。C_1，C_2，l，$y = -x$と各点を図示すると下図のようになる。



lとOHは平行であるから，

$$\overline{SO} : \overline{OW} = \overline{HS} : \overline{HT} = 2 : 1$$
$$\therefore \overline{SO} = 2\overline{OW}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OW} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OS} \\ &= -\frac{1}{2}(6, -6) \\ &= (-3, 3) \end{aligned}$$

となり，交点の座標は$(-3, 3)$である。

【4】

(1)

$t=\cos x$ と置換すると，対応表は以下のようになる。

x	0	$\to$	π
t	1	$\to$	-1

また，

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx&=\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx\\&=\int_1^{-1}-\left(1-t^2\right)dt\\&=\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)dt\\&=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}$

(2)

$$f_1(x)=r\sin^3\left(r^{-1}\left\{x-\left(\frac{1-r}{1-r}\right)\pi\right\}\right)=r\sin^3\left\{r^{-1}(x-\pi)\right\}$$

$$a_1=\frac{1-r}{1-r}\pi=\pi$$

$$b_1=\frac{1-r^2}{1-r}\pi=(1+r)\pi$$

となる。$t=r^{-1}(x-\pi)$ と置換すると，対応表は以下のようになる。

x	a_1	$\to$	b_1
t	0	$\to$	π

また，

$$\frac{dt}{dx}=r^{-1}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}c_1&=\int_{a_1}^{b_1}f_1(x)\,dx\\&=\int_{a_1}^{b_1}r\sin^3\left\{r^{-1}(x-\pi)\right\}dx\\&=\int_0^{\pi}r\sin^3 t\cdot r\,dt\\&=r^2\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt\\&=\frac{4}{3}r^2\quad(\because (1))\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}r^2$

(3)

$t=r^{-n}\left\{x-\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)\pi\right\}$ と置換すると，対応表は以下のようになる。

x	a_n	$\to$	b_n
t	0	$\to$	π

また，

$$\frac{dt}{dx}=r^{-n}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}c_n&=\int_{a_n}^{b_n}f_n(x)\,dx\\&=\int_{a_n}^{b_n}r^n\sin^3\left(r^{-n}\left\{x-\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)\pi\right\}\right)dx\\&=\int_0^{\pi}r^n\sin^3 t\cdot r^n\,dt\\&=r^{2n}\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt\\&=\frac{4}{3}r^{2n}\quad(\because (1))\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}r^{2n}$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c_k&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{3}r^{2k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4}{3}r^2\cdot\left(r^2\right)^{k-1}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}r^2\cdot\frac{1-r^{2n}}{1-r^2}\\&=\frac{4}{3}r^2\cdot\frac{1}{1-r^2}\quad(\because 0<r^2<1)\\&=\frac{4r^2}{3\left(1-r^2\right)}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4r^2}{3\left(1-r^2\right)}$

[5]

(1)

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sin 2t$$
$$\frac{dy}{dt}=2\cos t-2\cos 2t$$

であるから,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=\left(-2\sin t-2\sin 2t\right)^2+\left(2\cos t-2\cos 2t\right)^2\\&=\left(4\sin^2 t+8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t\right)+\left(4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t\right)\\&=4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t\right)\\&=8-8\cos 3t\\&=16\cdot\frac{1-\cos 3t}{2}\\&=16\sin^2\frac{3}{2}t\end{aligned}$$

となる。$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ であることより $\sin^2\frac{3}{2}t\geqq 0$ なので, $0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ における曲線 K の長さは,

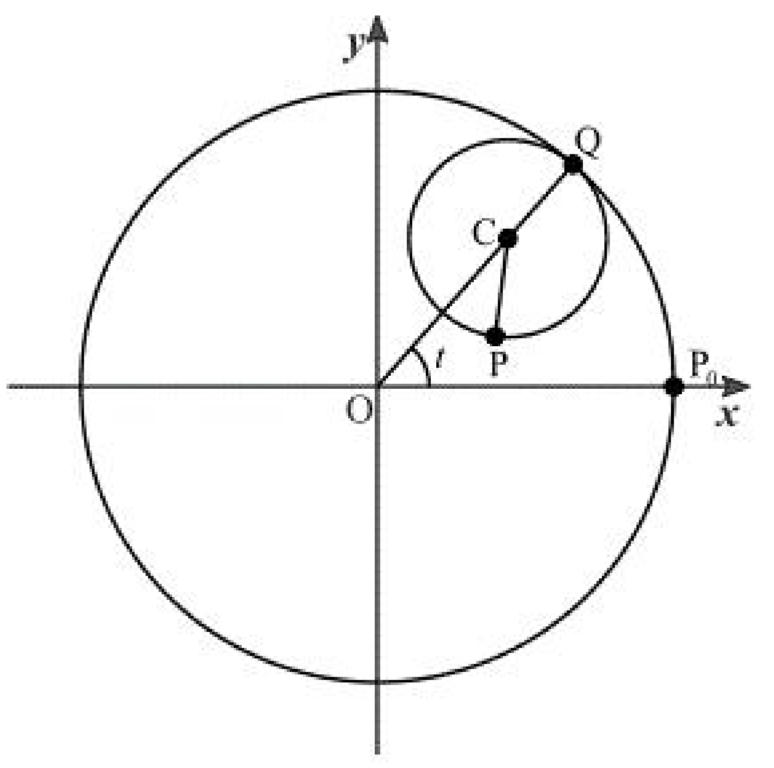
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt&=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}4\sin\frac{3}{2}t\,dt\\&=4\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\&=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{16}{3}$

(2)

点 P の初期位置を P_0, 直線 OC と円 C の交点のうち, 第1象限にあるものを Q とする。円 C と各点を図示すると下図のようになる。



弧 P_0Q の長さは $3t$ であるから, 弧 PQ の長さも $3t$ に等しい。したがって, $\angle PCQ=3t$ となる。以上より, $\overrightarrow{CP}$ とベクトル $(1, 0)$ のなす角は,

$$3t-t=2t$$

である。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\left(\cos(-2t),\ \sin(-2t)\right)\\&=\left(\cos 2t,\ -\sin 2t\right)\end{aligned}$$

と表せる。一方, $OC=2$ であるから,

$$\overrightarrow{OC}=\left(2\cos t,\ 2\sin t\right)$$

となる。

(答)

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
$2t$	$\cos 2t$	$-\sin 2t$	$2\cos t$	$2\sin t$

(3)

(1)より,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-2\sin t-2\cdot 2\sin t\cos t\\&=-4\sin t\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=2\cos t-2\left(2\cos^2 t-1\right)\\&=-4\left(\cos t-1\right)\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。また,

$t=0$ のとき, $(x, y)=(3, 0)$

$t=\frac{2}{3}\pi$ のとき, $(x, y)=\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$t=\pi$ のとき, $(x, y)=(-1, 0)$

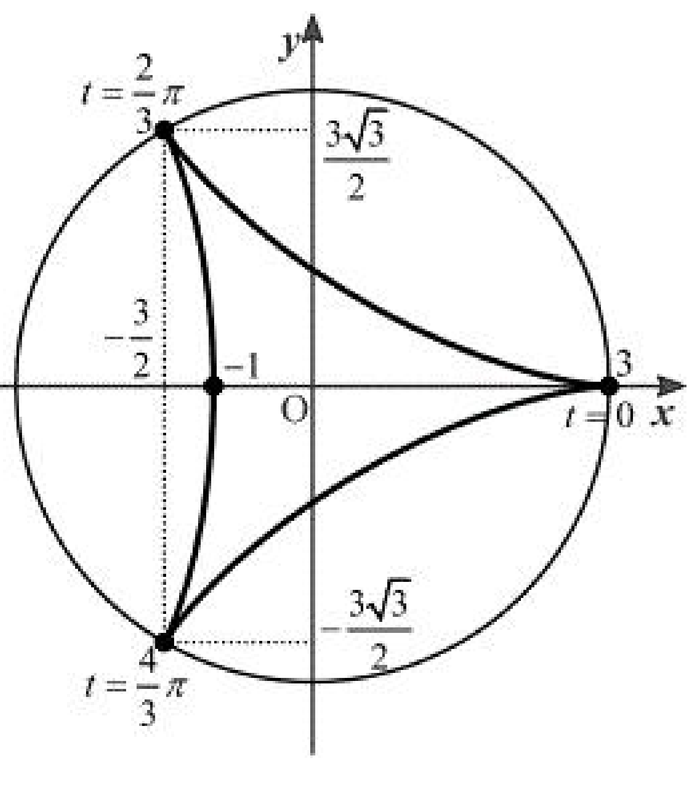
$t=\frac{4}{3}\pi$ のとき, $(x, y)=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$t=2\pi$ のとき, $(x, y)=(3, 0)$

である。したがって, x, y の増減は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
(x, y)	$(3, 0)$	↖	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	↘	$(-1, 0)$	↙	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	↗	$(3, 0)$

以上より, 曲線 K の概形は下図のようになる。



(答) 前図