

[1]

【解答】

(1)	1	2	3	4				
	5	8	5	2				
(2)	5	6	7					
	3	1	4					
(3)	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	3	3	2	3	2	1	7
(4)	16	17	18	19	20			
	1	4	1	3	6			

(1)

2 次関数の式を平方完成すると、

$$y=a\left(x+3\right)^2-9a+b$$

となる。よって、 $a>0$ と $-5\leq x\leq 2$ より、 $x=-3$ のとき最小値、 $x=2$ のとき最大値をとる。

よって、

$$-9a+b=-\frac{25}{8}$$

$$16a+b=\frac{25}{2}$$

である。これらを連立して、 $a=\frac{5}{8},b=\frac{5}{2}$ となる。

(2)

与式は三次方程式であるから、 $a\neq 0$ である。実係数の 3 次方程式は少なくとも 1 つ実数解をもつので、その解を α とする。実数でない解をもつとき、その共役複素数も解であるから、 $x=1-\sqrt{2}i$ も解である。よって、解と係数の関係より

$$\alpha+\left(1+\sqrt{2}i\right)+\left(1-\sqrt{2}i\right)=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\left(1+\sqrt{2}i\right)+\alpha\left(1-\sqrt{2}i\right)+\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=\frac{25}{a}$$

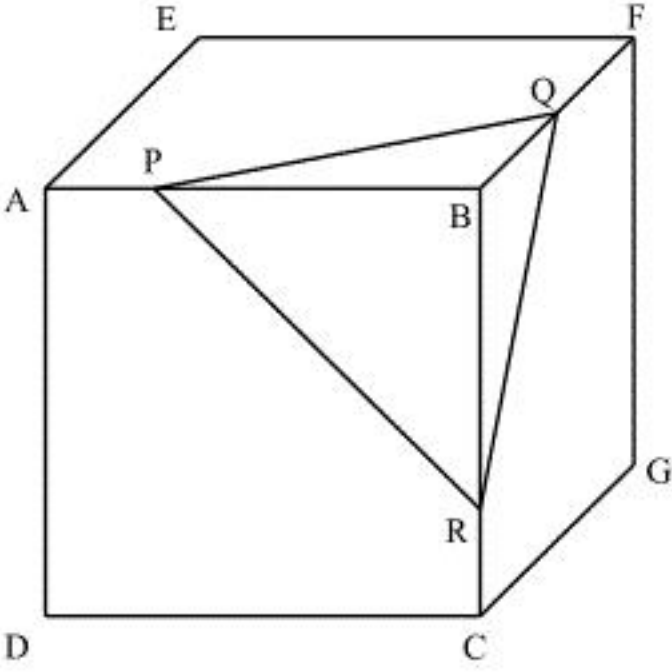
$$\alpha\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=8$$

が成り立つ。解くと、

$$\begin{cases} \alpha+2=-\frac{b}{a} \\ 2\alpha+3=\frac{25}{a} \\ 3\alpha=8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha=\frac{8}{3} \\ a=3 \\ b=-14 \end{cases}$$

が得られる。

(3)



上のような図になっている。条件より、 $BP=3, BQ=2, BR=3$ である。よって、三平方の定理より

$$PQ=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

$$RP=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

である。また、同様に $QR=\sqrt{13}$ であるから、 $\triangle PQR$ は $PQ=QR$ の二等辺三角形である。よって、 Q から辺 RP に下ろした垂線の足を H とすると H は辺 RP の中点になる。よって、三平方の定理より、

$$QH=\sqrt{PQ^2-PH^2}=\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$$

である。よって、求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot RP\cdot QH=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

である。

(4)

考えられる目の組み合わせは $6^3=216$ 通りあり、それぞれのさいころにおいて 1~6 の目がそれぞれ出る確率は同様に確からしいとする。ある整数が 4 の倍数になるための必要十分条件は、その整数の下 2 桁が 4 で割り切れることであるから、つくった 3 桁の自然数が 4 の倍数になるには

$$(y,z)=(1,2),(1,6),(2,4),(3,2),(3,6),(4,4),(5,2),(5,6),(6,4)$$

となることが必要十分である。よって、求める確率は

$$\frac{6\cdot 9}{216}=\frac{1}{4}$$

である。また、ある整数が 9 の倍数になるための必要十分条件は、その整数の各位の和が 9 の倍数となることである。よって、つくった 3 桁の自然数が 4 の倍数かつ 9 の倍数になるには、先ほど求めた (y,z) の組の y,z の和にさらに x を加え、その値が 9 の倍数になることが必要十分である。 $1\leq x\leq 6$ であるから、そのようになる (x,y,z) の組を探すと

$$(x,y,z)=(6,1,2),(2,1,6),(3,2,4),(4,3,2),(1,4,4),(2,5,2)$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$$

である。

[2]

【解答】

(1)	21	22	23	24		
	1	2	6	2		
(2)	25	26				
	2	5				
(3)	27	28	29	30	31	32
	4	5	7	9	3	6
(4)	33	34	35			
	2	3	7			

【解説】

(1)

x, y が $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を満たすことより,

$$\begin{aligned}x &= 2 + \cos \theta \\ y &= 1 + \sin \theta\end{aligned}$$

とおける。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。よって,

$$\begin{aligned}y - \frac{1}{\sqrt{2}}x &= (1 + \sin \theta) - \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + \cos \theta) \\ &= \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos \theta + 1 - \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\sin(\theta - \alpha) + 1 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。ただし、 α は $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数とする。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq$

$\sin(\theta - \alpha) \leq 1$ であるから、最大値は $1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

(2)

$t = 2^x - 2^{-x}$ とおくと,

$$t^2 = 4^x - 2 + 4^{-x} \Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 + 2$$

となるから,

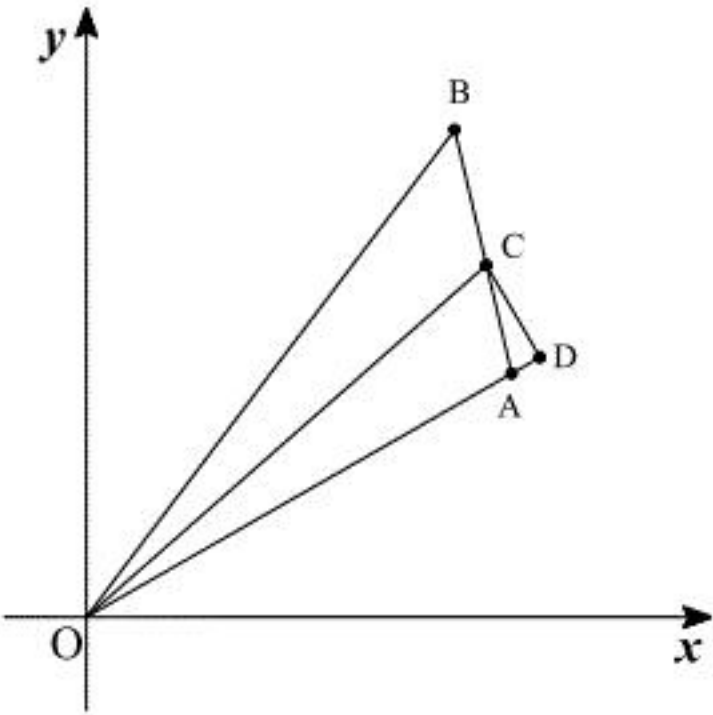
$$\begin{aligned}4^x + 4^{-x} - 2^{x+3} + 2^{-x+3} + 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2 - 8t + 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-4)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 4\end{aligned}$$

となる。よって,

$$2^x - 2^{-x} = 4 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \pm \sqrt{5}$$

となる。ここで、 $2^x > 0$ であるから $2^x = 2 + \sqrt{5}$ となる。よって、 $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$ である。

(3)



三平方の定理より、 $OA = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ である。よって、角の二等分線の

性質より,

$$AC:CB = OA:OB = 4:5$$

である。よって、点 C は辺 AB を 4:5 に内分する。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。すると,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = k\vec{a} - \left(\frac{5\vec{a} + 4\vec{b}}{9}\right)$$

である。また、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3} \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6\sqrt{3} + 8$ である。CD と OA が直交していることより

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ となるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(k\vec{a} - \frac{5\vec{a} + 4\vec{b}}{9}\right) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 16k - \frac{80}{9} - \frac{4}{9}(6\sqrt{3} + 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

である。

(4)

$a_{n+1} = \frac{7a_n}{8a_n + 3}$ であるから、 $a_n \neq 0$ のとき、 $a_{n+1} \neq 0$ となる。よって、帰納的に $a_n \neq 0$ となる。こ

れより,

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{f(a_n)} = \frac{8a_n + 3}{7a_n} = \frac{3}{7a_n} + \frac{8}{7} = \frac{3}{7}b_n + \frac{8}{7}$$

である。変形すると

$$b_{n+1} - 2 = \frac{3}{7}(b_n - 2)$$

となる。また、 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 3$ であるから、数列 $\{b_n - 2\}$ は初項 1, 公比 $\frac{3}{7}$ の等比数列である。よっ

て,

$$b_n - 2 = \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \Leftrightarrow b_n = 2 + \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$$

となる。

[3]

【解答】

(1)	36	37	38	39	40	41	42	43		
	1	3	4	3	2	7	4	2		
(2)	44	45	46	47	48	49				
	2	2	2	2	2	2				
(3)	50	51	52	53	54					
	7	2	4	5	4					

【解説】

(1)

$P(x, y)$ とおく。点 A が原点に移るように点 A, B, P を同じだけ平行移動させ、移った後の点をそれぞれ A', B', P' とすると

$$A'(0, 0), B'\left(1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), P'\left(x+1, y+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

となる。平行移動しても三角形の面積は変わらないから

$$\triangle ABP = \triangle A'B'P' = \frac{1}{2} \left| 1 \cdot \left(y + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot (x+1) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}}x + y + 2\sqrt{2} \right|$$

となる。また、点 P が楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上を動くことより、

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y &= 2 \sin \theta \end{aligned}$$

とおける。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。よって

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}}x + y + 2\sqrt{2} \right| = \left| 2 \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + 2\sqrt{2} \right| = \left| \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin(\theta + \alpha) + 2\sqrt{2} \right|$$

となる。ただし、 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ を満たす実数とする。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より

$-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ であるから、最大値は $\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$ である。また、このとき

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

であるから、三角形 ABP の面積が最大となるときの点 P の座標は

$$(x, y) = (\cos \theta, 2 \sin \theta) = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = (\sin \alpha, 2 \cos \alpha) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2} \right)$$

である。

(2)

接線は y 軸に平行ではないので、接線の傾きは k とおける。点 B を通る傾き k の直線は $y = kx - 2\sqrt{2}$ である。これと楕円の式から y を消去して計算すると

$$4x^2 + (kx - 2\sqrt{2})^2 = 4 \Leftrightarrow (k^2 + 4)x^2 - 4\sqrt{2}kx + 4 = 0$$

となる。この直線が第 4 象限で楕円に接するとき、判別式 $D = 0$ かつ $k > 0$ となる。

$$\frac{D}{4} = 8k^2 - 4(k^2 + 4) = 4(k^2 - 4)$$

より、

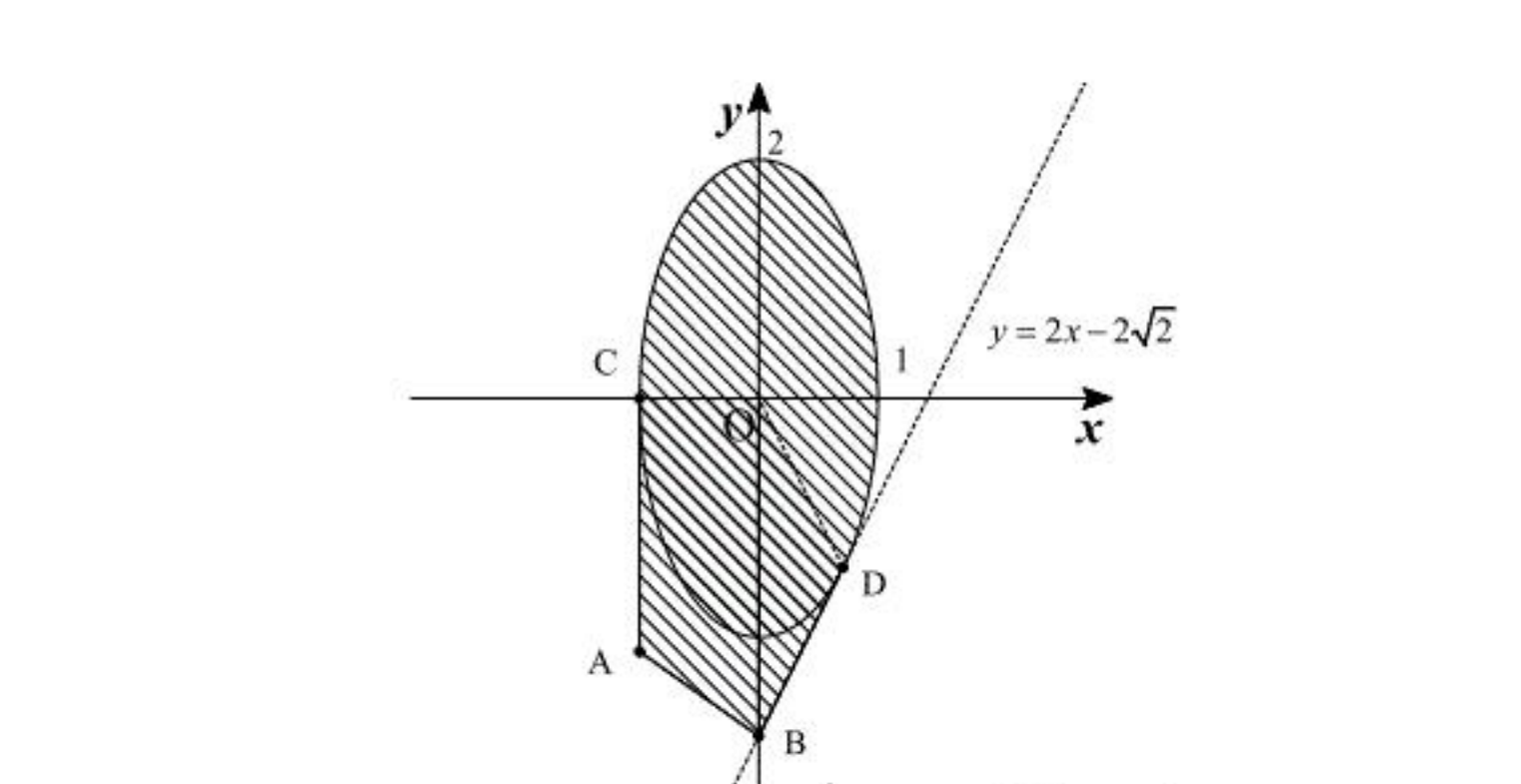
$$\begin{aligned} D &= 0, k > 0 \\ \Leftrightarrow 4(k+2)(k-2) &= 0, k > 0 \\ \Leftrightarrow k &= 2 \end{aligned}$$

である。よって、直線の方程式は $y = 2x - 2\sqrt{2}$ である。また、接点の x 座標は、先ほどの 2 次方程式に $k = 2$ を代入して

$$\begin{aligned} 8x^2 - 8\sqrt{2}x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。直線の式にこれを代入して、接点の y 座標は $y = -\sqrt{2}$ となる。

(3)



問題の領域は上の図の斜線部分である。また、 $C(-1, 0)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$ とする。図の実線のように、斜線部分を台形 $OBAC$ 、三角形 OBD 、楕円の一部にわけて面積を求める。それぞれの

面積を S_1, S_2, S_3 とし、楕円の一部を領域 E とする。まず、 $A\left(-1, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, $B(0, -2\sqrt{2})$ より

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \right) \cdot 1 = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

である。また、楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ を y 軸方向に 2 倍に引き伸ばしたものであるから、円 $x^2 + y^2 = 1$ の領域 E に対応する部分の面積を 2 倍すれば S_3 が求まる。また、(1) と同様に極座標表示すると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \sin \theta &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

より、 $\theta = \frac{7}{4}\pi$ である。つまり、円 $x^2 + y^2 = 1$ で考えると、領域 E に対応する円の一部分の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4}\pi = \frac{5}{8}\pi$$

である。したがって

$$S_3 = 2 \cdot \frac{5}{8}\pi = \frac{5}{4}\pi$$

である。以上より求める面積は

$$\frac{7\sqrt{2} + 4 + 5\pi}{4}$$

である。

[4]

(1)

放物線の方程式を x で微分すると、 $y' = 8x$ であるから、

$$l_p: y = 8a(x - a) + 4a^2 = 8ax - 4a^2$$

$$l_q: y = 8bx - 4b^2$$

となる。 l_p と l_q が直交することより、

$$8a \cdot 8b = -1 \Leftrightarrow ab = -\frac{1}{64}$$

である。また、2 直線の方程式から y を消去すると、 $b - a > 0$ より、

$$8ax - 4a^2 = 8bx - 4b^2 \Leftrightarrow 8(b - a)x = 4(b^2 - a^2) \Leftrightarrow x = \frac{a + b}{2}$$

となる。 l_p の方程式に代入して

$$y = 8a \cdot \frac{a + b}{2} - 4a^2 = 4ab$$

となる。 $ab = -\frac{1}{64}$ であるから、点 R の y 座標は $4 \cdot \left(-\frac{1}{64}\right) = -\frac{1}{16}$ となる。

(証明終)

(2)

点 R が原点に移るように点 R, P, Q を同じだけ平行移動させ、移った後の点をそれぞれ R', P', Q' とすると

$$R'(0, 0), P'\left(-\frac{b-a}{2}, 4a^2 + \frac{1}{16}\right), Q'\left(\frac{b-a}{2}, 4b^2 + \frac{1}{16}\right)$$

となる。平行移動しても三角形の面積は変わらないから、

$$\triangle RPQ = \triangle R'P'Q'$$

であり

$$\triangle R'P'Q' = \frac{1}{2} \left| \left(-\frac{b-a}{2}\right) \cdot \left(4b^2 + \frac{1}{16}\right) - \frac{b-a}{2} \cdot \left(4a^2 + \frac{1}{16}\right) \right| = \frac{1}{4} (b-a) \left| 4a^2 + 4b^2 + \frac{1}{8} \right|$$

となる。また、(1)より $ab = -\frac{1}{64}$ であるから、

$$\triangle R'P'Q' = \frac{1}{4} (b-a) \left| 4b^2 - 8ab + 4a^2 \right| = (b-a)^3$$

となる。よって、

$$\triangle RPQ = (b-a)^3$$

である。

(答) $(b-a)^3$

(3)

(2)の結果より、 $b-a$ の最小値を求めればよい。 $ab = -\frac{1}{64} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{64b}$ であるから

$$b-a = b + \frac{1}{64b}$$

である。また、 $ab = -\frac{1}{64}$ と $a < b$ より、 $a < 0 < b$ である。特に $b > 0$ である。よって、相加・相乗平均の関係より、

$$b-a = b + \frac{1}{64b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{64b}} = \frac{1}{4}$$

である。等号は

$$b = \frac{1}{64b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{8} \quad (\because b > 0)$$

のとき成り立つ。このとき

$$a = -\frac{1}{64} \cdot 8 = -\frac{1}{8}$$

となる。よって、 $(a, b) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ のとき三角形 PQR の面積は最小になり、その値は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \text{ である。}$$

(答) $\frac{1}{64}$

[5]

(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OH} = \vec{h}$ とおく。すると、

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

が成り立つ。また、点 H が点 A, B, C と同じ平面上にあることより、実数 l, m, n を用いて、

$$\vec{h} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} \quad (l + m + n = 1)$$

とおける。 $\vec{h}$ と $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ は垂直であるから、

$$\vec{h} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow 4m - l = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}l$$

となる。同様に $\vec{h}$ と $\vec{c} - \vec{a}$ は垂直であるから、

$$\vec{h} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow 16n - l = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{16}l$$

となる。よって、

$$l + m + n = 1 \Leftrightarrow l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{16}l = 1 \Leftrightarrow l = \frac{16}{21}$$

である。これから、 $m = \frac{4}{21}, n = \frac{1}{21}$ が得られる。よって、

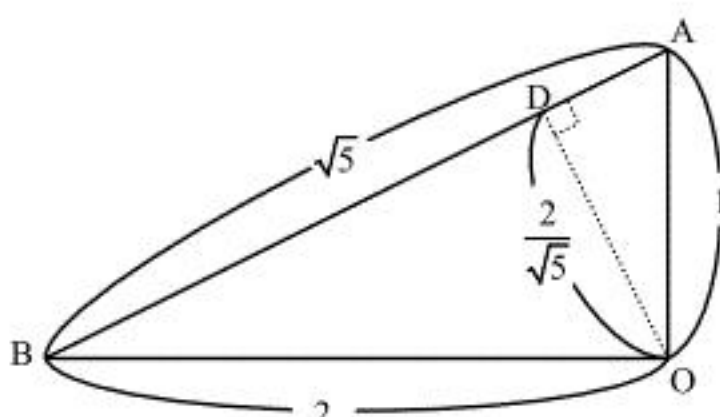
$$H\left(\frac{16}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{21}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad H\left(\frac{16}{21}, \frac{8}{21}, \frac{4}{21}\right)$$

(2)

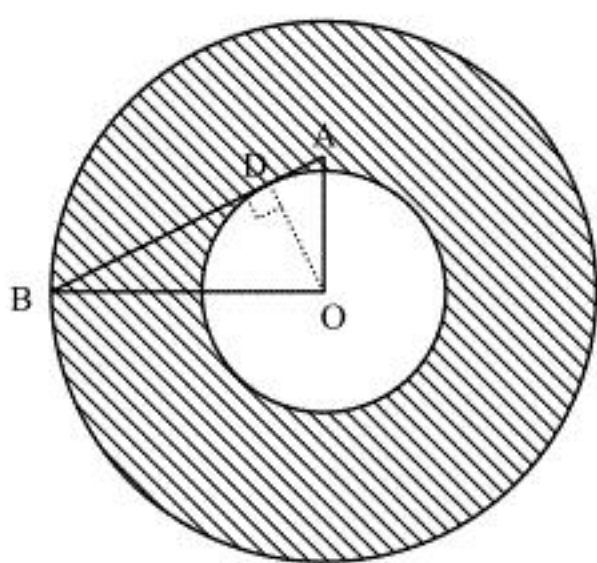
まず、 $a = 0$ のときを考える。



上のような図になっている。ただし、点 D は原点から辺 AB に下ろした垂線の足である。三平方の定理より $AB = \sqrt{5}$ である。また、 $\triangle OAB$ の面積を 2 通りの表し方で表し、等号で結ぶと

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OD \Leftrightarrow OD = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

が得られる。問題の立体の断面は下のような図になっている。



よって

$$S(0) = \pi \left(2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) = \frac{16}{5} \pi$$

である。また、直線 AC, BC, OC 上の $z = a$ となる点をそれぞれ A', B', O' とすると $\triangle A'B'O'$ は $\triangle ABO$ と相似で、その比は $4:(4-a)$ である。よって

$$S(a) = \left(\frac{4-a}{4} \right)^2 S(0) = \frac{\pi}{5} (4-a)^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \frac{\pi}{5} (4-a)^2$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{S'(z)}{S(z)} dz &= [\log S(z)]_1^3 \\ &= \left[\log \left\{ \frac{\pi}{5} (4-z)^2 \right\} \right]_1^3 \\ &= \log \frac{\pi}{5} - \log \frac{9\pi}{5} \\ &= -2 \log 3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -2 \log 3$$