

【1】

【解答】

(1)	1	2	3			
	4	2	3			
(2)	4	5	6	7		
	1	1	1	3		
(3)	8	9	10	11		
	2	8	5	5		
(4)	12	13	14	15	16	17
	3	4	3	3	4	3

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6}) &= (5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) \\
 &= 5^2 - (2\sqrt{6})^2 \\
 &= 1 \\
 \frac{5+3\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} &= \frac{(5+3\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} \\
 &= \frac{\sqrt{3}-1}{7^2 - (4\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{3}-1
 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 \left\{ 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6}) + \frac{5+3\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} \right\}^2 &= (2 \cdot 1 + \sqrt{3} - 1)^2 \\
 &= (\sqrt{3} + 1)^2 \\
 &= 4 + 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}
 (x-2)(x-1)(x+3)(x+4) &= 36 \\
 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2)(x+4) - 36 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)(x^2+2x-8) - 36 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2 - 11(x^2+2x) - 12 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2+2x-12)(x^2+2x+1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+1+\sqrt{13})(x+1-\sqrt{13})(x+1)^2 &= 0 \\
 \therefore x = -1, -1 \pm \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

となる。

(3)

どの玉を取り出す確率も同様に確からしいため、場合の数を考えれば良い。白玉や赤玉をそれぞれ区別して考えると、12個の玉から3個を選ぶ選び方は ${}_{12}C_3$ 通り、8個の白玉から2個選ぶ選び方は ${}_8C_2$ 通り、4個の白玉から1個選ぶ選び方は ${}_4C_1$ 通りである。よって、求める確率は、

$$\frac{{}_8C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{28 \cdot 4}{220} = \frac{28}{55}$$

となる。

(4)

真数条件から

$$\text{「} x+4 > 0 \text{ かつ } 10-x > 0 \text{」} \Leftrightarrow \text{「} -4 < x < 10 \text{」}$$

が必要である。また,

$$\log_{\frac{1}{10}}(x+4) = \frac{\log_{10}(x+4)}{\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)} = -\log_{10}(x+4)$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 \log_{\frac{1}{10}}(x+4) &\leq \log_{10}(10-x) \\
 \Leftrightarrow -\log_{10}(x+4) &\leq \log_{10}(10-x) \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq \log_{10}(10-x) + \log_{10}(x+4) \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq \log_{10}\{(10-x)(x+4)\} \\
 \Leftrightarrow 1 &\leq (10-x)(x+4) \\
 \Leftrightarrow 1 &\leq -x^2 + 6x + 40 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 39 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \left\{ x - (3-4\sqrt{3}) \right\} \left\{ x - (3+4\sqrt{3}) \right\} &\leq 0 \\
 \therefore 3-4\sqrt{3} &\leq x \leq 3+4\sqrt{3} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。 $-4 < 3-4\sqrt{3}$, $3+4\sqrt{3} < 10$ であるため、 $\textcircled{1}$ が求める解である。

【2】

【解答】

(1)	18	19	20	21			
	4	2	4	2			
(2)	22	23	24	25			
	1	3	3	5			
(3)	26	27	28	29	30	31	
	3	1	1	6	1	4	
(4)	32	33	34	35	36	37	38
	3	4	3	2	4	5	2

【解説】

(1)

直線上の点は x 座標が定まれば、 y 座標が定まるため、共有点の個数と連立方程式

$$\begin{cases} y=2x+k \\ 4x^2+y^2=16 \end{cases}$$

を満たす実数 x の個数は一致する。よって、 y を消去して得られる x についての方程式

$$4x^2+(2x+k)^2=16 \\ \Leftrightarrow 8x^2+4kx+k^2-16=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が、2つの異なる実数解をもつような k の範囲を考えればよい。その条件は①の判別式 $D>0$ となることであるから、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4}&>0 \\ \Leftrightarrow (2k)^2-8(k^2-16)&>0 \\ \Leftrightarrow -4k^2+128&>0 \\ \Leftrightarrow k^2<32 \\ \therefore -4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

形式的に S_0 を考えると $S_0=0$ となっているため、

$$a_n=S_n-S_{n-1} \ (n\geq 1)$$

としてよい。よって、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= \frac{1}{24}(2n^3-75n^2+97n)-\frac{1}{24}\{2(n-1)^3-75(n-1)^2+97(n-1)\} \\ &= \frac{1}{24}(6n^2-156n+174) \\ &= \frac{1}{4}(n^2-26n+29) \\ &= \frac{1}{4}(n-13)^2-35 \end{aligned}$$

である。したがって、 a_n は $n=13$ のとき最小値 -35 をとる。

(3)

極限

$$\lim_{x\rightarrow 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}$$

が収束するとき、分母 $x-2$ が 0 に収束するため、分子 $\sqrt{x+a}-b$ も 0 に収束する必要がある。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow 2}(\sqrt{x+a}-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2+a}-b &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \sqrt{2+a} \end{aligned}$$

となる必要がある。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2} &= \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}} \end{aligned}$$

となるため、

$$\lim_{x\rightarrow 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=\lim_{x\rightarrow 2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}=\frac{1}{2\sqrt{2+a}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、確かに収束する。よって、①が2に一致するとき、

$$\frac{1}{2\sqrt{2+a}}=2\Leftrightarrow a=-\frac{31}{16}$$

であり、

$$b=\sqrt{2+a}=\frac{1}{4}$$

である。

(4)

2つの放物線の交点の x 座標を求める。 $y=-x^2+3$ と $y=x^2-5x$ から y を消去して、

$$\begin{aligned} -x^2+3 &= x^2-5x \\ \Leftrightarrow 2x^2-5x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2}, 3 \end{aligned}$$

となる。放物線 $y=-x^2+3$ は上に凸で、放物線 $y=x^2-5x$ は下に凸であるから、 $-\frac{1}{2}<x<3$ の

範囲で $-x^2+3>x^2-5x$ となる。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^3(-x^2+3-x^2+5x)dx &= -2\int_{-\frac{1}{2}}^3\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)dx \\ &= \frac{2}{6}\left(3+\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{343}{24} \end{aligned}$$

である。また、2つの放物線の方程式を変形し、

$$\begin{aligned} y &= -x^2+3 \Leftrightarrow y+x^2-3=0 \\ y &= x^2-5x \Leftrightarrow y-x^2+5x=0 \end{aligned}$$

の辺々を足し合わせて得られる方程式

$$\begin{aligned} 2y+5x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x+2y &= 3 \end{aligned}$$

で表される直線は2交点を通る。2つの放物線の2交点を通る直線は一意に定まるため、これが求める直線の方程式である。

[3]

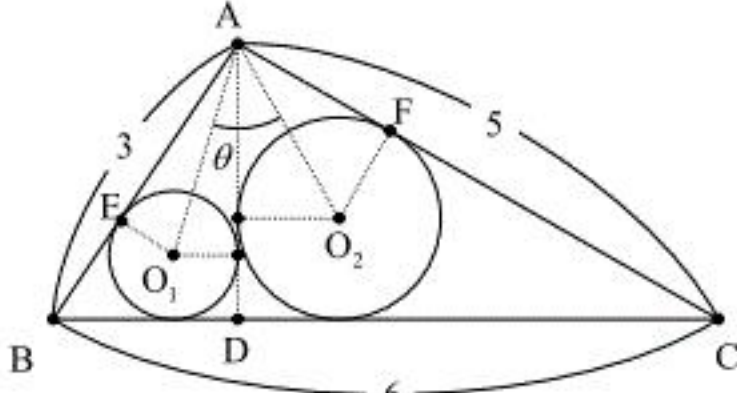
【解答】

(1)	39	40	41	42	43	44	45	46	47
	2	1	4	1	4	2	3	1	3
(2)	48	49	50	51	52	53			
	1	4	2	3	1	3			
(3)	54	55	56	57	58				
	1	0	5	4	3				

【解説】

(1)

与えられた図形について、図示すると以下ようになる



$BD = x$ とする。△ ABD に三平方の定理を用いると、

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

であり、一方△ ADC に三平方の定理を用いると

$$AD^2 + CD^2 = AC^2$$

であるから、

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} 3^2 - x^2 &= 5^2 - (6-x)^2 \\ \Leftrightarrow 12x &= 20 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{3^2 - x^2} \\ &= \sqrt{9 - \frac{25}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{3} \end{aligned}$$

を得る。△ ABD の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot AD$$

となる。また、△ ABD の内接円の半径が r_1 であるから

$$S = \frac{1}{2} (AB + BD + DA) r_1$$

とも表せる。よって、

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{BD \cdot AD}{AB + BD + DA} \\ &= \frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{3}}{3 + \frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{14}}{3}} \\ &= \frac{5\sqrt{14}}{21 + 3\sqrt{14}} \\ &= \frac{\sqrt{14} - 2}{3} \end{aligned}$$

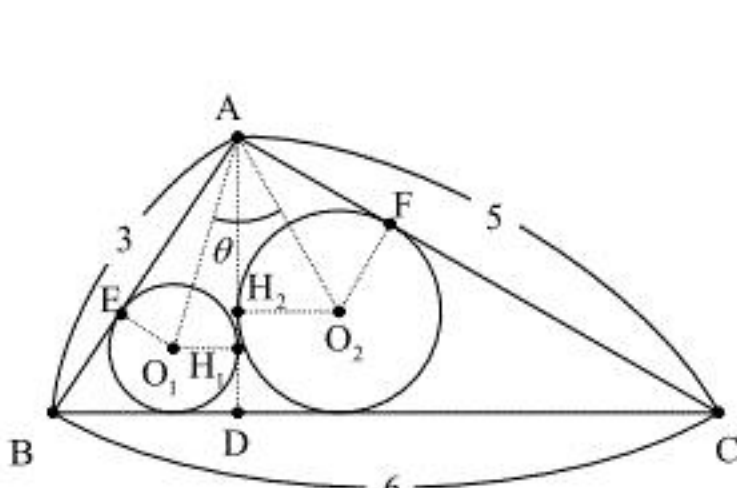
となる。同様のことを△ ADC について考えると、

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{AD \cdot CD}{AC + CD + DA} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{14}}{3} \cdot \frac{13}{3}}{5 + \frac{13}{3} + \frac{2\sqrt{14}}{3}} \\ &= \frac{13\sqrt{14}}{42 + 3\sqrt{14}} \\ &= \frac{\sqrt{14} - 1}{3} \\ &= r_1 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

を得る。

(2)

O_1, O_2 から線分 AD へ降ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とする。改めて図示すると以下のようになる。



傍接円の性質より、

$$AE = AH_1$$

$$AF = AH_2$$

である。ここで BC, OH_1, OH_2 は平行であるから、

$$DH_1 = r_1$$

$$DH_2 = r_2$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} AE &= AH_1 \\ &= AD - AH_1 \\ &= AD - r_1 \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{3} - \frac{\sqrt{14} - 2}{3} \\ &= \frac{\sqrt{14} + 2}{3} \\ AF &= AH_2 \\ &= AD - AH_2 \\ &= AD - r_2 \\ &= AD - \left(r_1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= AE - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\angle O_1 A H_1 = \alpha, \angle O_2 A H_2 = \beta$ とする。

$$\begin{aligned} AO_1 &= \sqrt{AH_1^2 + O_1 H_1^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14} + 2}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14} - 2}{3} \right)^2} \\ &= 2 \\ AO_2 &= \sqrt{AH_2^2 + O_2 H_2^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14} + 1}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14} - 1}{3} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{3} \end{aligned}$$

である。 $\cos \alpha = \frac{AH_1}{AO_1}, \sin \alpha = \frac{OH_1}{AO_1}, \cos \beta = \frac{AH_2}{AO_2}, \sin \beta = \frac{OH_2}{AO_2}$ であるため、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\alpha + \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{AH_1}{AO_1} \cdot \frac{AH_2}{AO_2} - \frac{OH_1}{AO_1} \cdot \frac{OH_2}{AO_2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{14} + 2}{3} \cdot \frac{\sqrt{14} + 1}{3} - \frac{\sqrt{14} - 2}{3} \cdot \frac{\sqrt{14} - 1}{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{30}}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{105}}{15} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{30}}{15} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

より、△ $AO_1 O_2$ の面積は、

$$\frac{1}{2} AO_1 \cdot AO_2 \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{30}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{30}}{15} = \frac{4}{3}$$

である。

[4]

(1)

点 $\left(t, \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right) (t > 1)$ での C の接線を考える。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)' = -\frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

であるため、接線の方程式は、

$$y - \frac{1}{\sqrt{t-1}} = -\frac{1}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}}(x-t)$$

である。これが $(3, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} 0 - \frac{1}{\sqrt{t-1}} &= -\frac{1}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}}(3-t) \\ \Leftrightarrow 2(t-1) &= 3-t \\ \therefore t &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

である。よって、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}-1}} &= -\frac{1}{2\left(\frac{5}{3}-1\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x - \frac{5}{3}\right) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3\sqrt{6}}{8}x + \frac{9\sqrt{6}}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{3\sqrt{6}}{8}, b = \frac{9\sqrt{6}}{8}$$

(2)

直線 l と曲線 C の共有点の x 座標は、 $y = -x+3$ と $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ から y を消去して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x-1}} &= -x+3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} &= (-x+3)^2 \quad \text{かつ } x < 3 \\ \Leftrightarrow 1 &= (x-1)(x-3)^2 \quad \text{かつ } x < 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 15x - 10 &= 0 \quad \text{かつ } x < 3 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 5x + 5) &= 0 \quad \text{かつ } x < 3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \left(\because \frac{5+\sqrt{5}}{2} > 3 \right)$$

となる。これらの x を $y = -x+3$ に代入すると

$$(x, y) = (2, 1), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

が得られる。よって、直線 l と曲線 C の共有点の座標は $(2, 1), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ である。

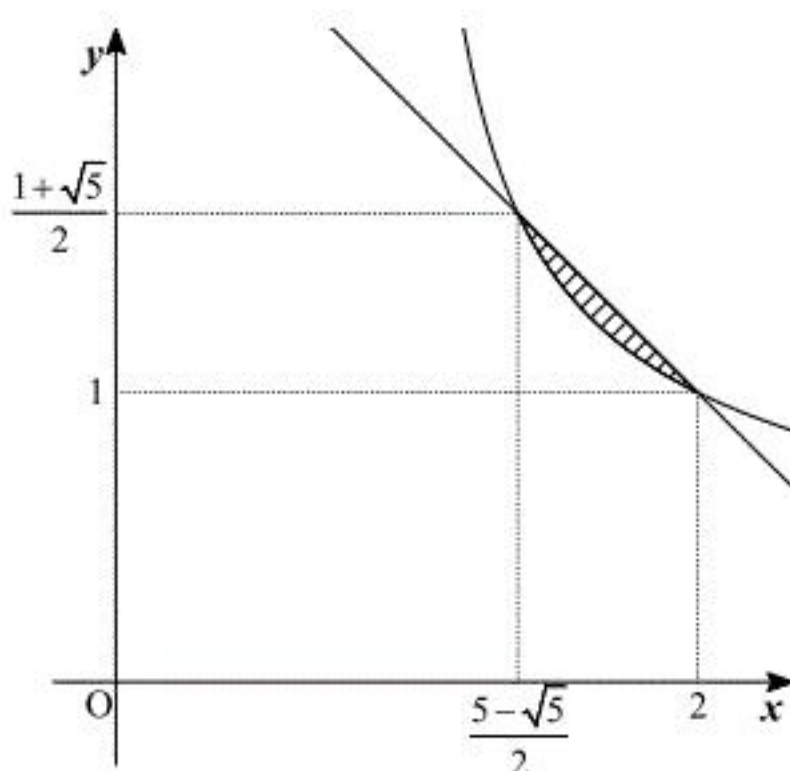
$$(\text{答}) \quad (2, 1), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(3)

(2)より、囲まれる図形の存在する範囲は $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2$ である。この範囲での直線 l と曲線 C の上下関係を考える。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)' &= -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)'' &= \frac{3}{4}(x-1)^{-\frac{5}{2}} > 0 \end{aligned}$$

であるため、曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ は下に凸であるから、 $-x+3 > \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ となる。よって求める面積は以下の斜線部の面積である。



よって求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^2 \left(-x+3 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) dx &= \left[-\frac{x^2}{2} + 3x - 2\sqrt{x-1}\right]_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^2 \\ &= 2 + \frac{15-5\sqrt{5}}{4} - \frac{15-3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{-7+\sqrt{5}}{4} + \sqrt{1^2 + \sqrt{5}^2} - 2\sqrt{5} \\ &= \frac{-7+\sqrt{5}}{4} + \sqrt{5} - 1 \\ &= \frac{-11+5\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

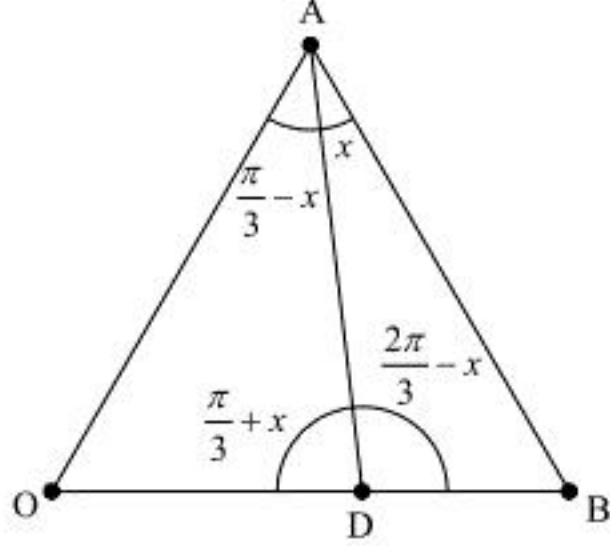
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{-11+5\sqrt{5}}{4}$$

[5]

(1)

△OABを図示すると以下のようになる。



△ABDについて正弦定理を用いると

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}=\frac{BD}{\sin x}$$

となるため、

$$\begin{aligned} BD &= \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} \\ &= \frac{\sin x}{\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x} \\ &= \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x} \end{aligned}$$

$$OD=1-BD$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}$$

となる。よって、点Dは線分OBを

$$OD:DB=\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}:\frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}$$

に内分する点であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \frac{OD}{OB}\vec{a} + \frac{BD}{OB}\vec{c} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a} + \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AD} = \frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a} + \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c}$$

(2)

内積の定義式より、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AE}|}$$

である。点Eは線分OCを1:1に内分するから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。また、正四面体OABCは各辺の長さが1であり、隣り合う2辺のなす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 1$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} &= \left(\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a} + \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x} (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x} (\vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+2\tan x}{2(\sqrt{3}+\tan x)} \\ |\overrightarrow{AD}|^2 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a} + \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a} + \frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}+\tan x)^2} \left\{ (\sqrt{3}-\tan x)^2 \vec{a} \cdot \vec{a} + 4\tan x (\sqrt{3}-\tan x) \vec{a} \cdot \vec{c} + 4\tan^2 x \vec{c} \cdot \vec{c} \right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}+\tan x)^2} \left\{ (\sqrt{3}-\tan x)^2 + 2\tan x (\sqrt{3}-\tan x) + 4\tan^2 x \right\} \\ &= \frac{3(\tan^2 x + 1)}{(\sqrt{3}+\tan x)^2} \\ &= \frac{3}{(\sqrt{3}+\tan x)^2 \cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AE}|^2 &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AE}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AE}|} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}+2\tan x}{2(\sqrt{3}+\tan x)}}{\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cos x + 2\sin x}{3} \end{aligned}$$

となる。三角関数の合成公式より、 $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ なる α を用いて、

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{3} \sin(x+\alpha)$$

とかける。ここで $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \tan\alpha$ より、 $\alpha > \frac{\pi}{6}$ である。よって $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ を動くため、

$x+\alpha = \frac{\pi}{2}$ となるような x が存在し、 $\cos\theta$ は最大値 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}\cos x + 2\sin x}{3}, \quad \text{最大値: } \frac{\sqrt{7}}{3}$$

(3)

△ADEの面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 |\overrightarrow{AE}|^2 - (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{4} \frac{\tan^2 x + 1}{(\sqrt{3}+\tan x)^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}+2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}}{4(\sqrt{3}+\tan x)} \quad (\because \sqrt{3}+\tan x > 0) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ において、この式は常に正となるため

$$(4S)^2 = \frac{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}{(\sqrt{3}+\tan x)^2}$$

が最小となる $\tan x$ を考えればよい。 $\sqrt{3}+\tan x = t$ とおいて

$$\begin{aligned} (4S)^2 &= \frac{5t^2-14\sqrt{3}t+33}{t^2} \\ &= 5-14\sqrt{3}\frac{1}{t}+33\frac{1}{t^2} \\ &= 33\left(\frac{1}{t}-\frac{7\sqrt{3}}{33}\right)^2 + \frac{6}{11} \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ を動くため、

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

を動く。 $\frac{\sqrt{3}}{6} \leq \frac{7\sqrt{3}}{33} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ であるため、 S が最小となるのは $\frac{1}{t} = \frac{7\sqrt{3}}{33}$ のとき、つまり

$$\tan x = t - \sqrt{3} = \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

のときである。

$$(\text{答}) \quad \text{三角形ADEの面積: } \frac{\sqrt{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}}{4(\sqrt{3}+\tan x)}, \quad \tan x \text{ の値: } \frac{4}{7}\sqrt{3}$$