

【1】

〔解答〕

(1)	1	2	3	4	5	6	7
	1	3	2	1	3	5	3
(2)	8	9	10				
	3	2	7				
(3)	11	12	13				
	8	3	3				
(4)	14	15	16				
	3	1	1				

〔解説〕

(1)

2 つの放物線 $y=4x^2-7x-1$ と $y=x^2-2x+1$ の共有点の x 座標は、

$$\begin{aligned}4x^2-7x-1&=x^2-2x+1\\ \Leftrightarrow 3x^2-5x-2&=0\\ \Leftrightarrow (3x+1)(x-2)&=0\\ \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}, 2\end{aligned}$$

となる。また、これらを $y=x^2-2x+1$ に代入すると、 $\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{16}{9}$ 、 $2^2-2\cdot 2+1=1$

であるから共有点の座標は $\left(-\frac{1}{3}, \frac{16}{9}\right)$ 、 $(2, 1)$ であり、この2点をとともに通る直線の方程式は、

$$y-1=\frac{1-\frac{16}{9}}{2-\left(-\frac{1}{3}\right)}\cdot (x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

となる。

(2)

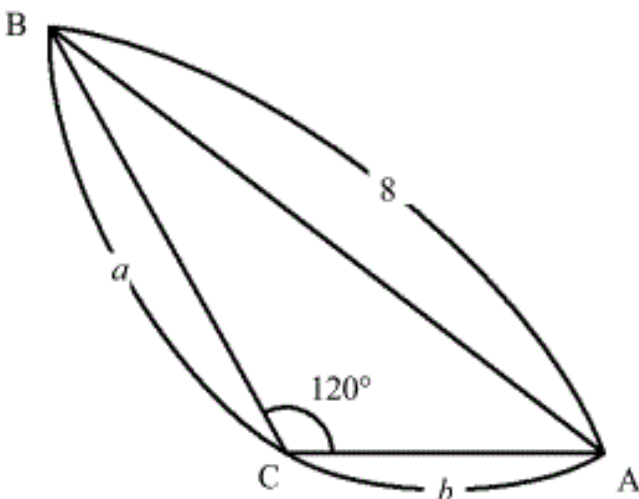
2, 3, 5 は互いに素であるから $A\cap B\cap C=\{x\mid x \text{ は } 30 \text{ の倍数}\}$ である。100 以下の自然数で 30 の倍数であるものは 30, 60, 90 のみであるから、 $n(A\cap B\cap C)=3$ となる。同様に、 A 、 $A\cap B$ 、 $A\cap C$ はそれぞれ 2, 6, 10 の倍数の集合だから $n(A)=50$ 、 $n(A\cap B)=16$ 、 $n(A\cap C)=10$ である。

また、ド・モルガンの法則より $A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ であり、

$$\begin{aligned}n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})&=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\ &=50-16-10+3\\ &=27\end{aligned}$$

となる。したがって、 $n(A\cap(\overline{B\cup C}))=27$ である。

(3)



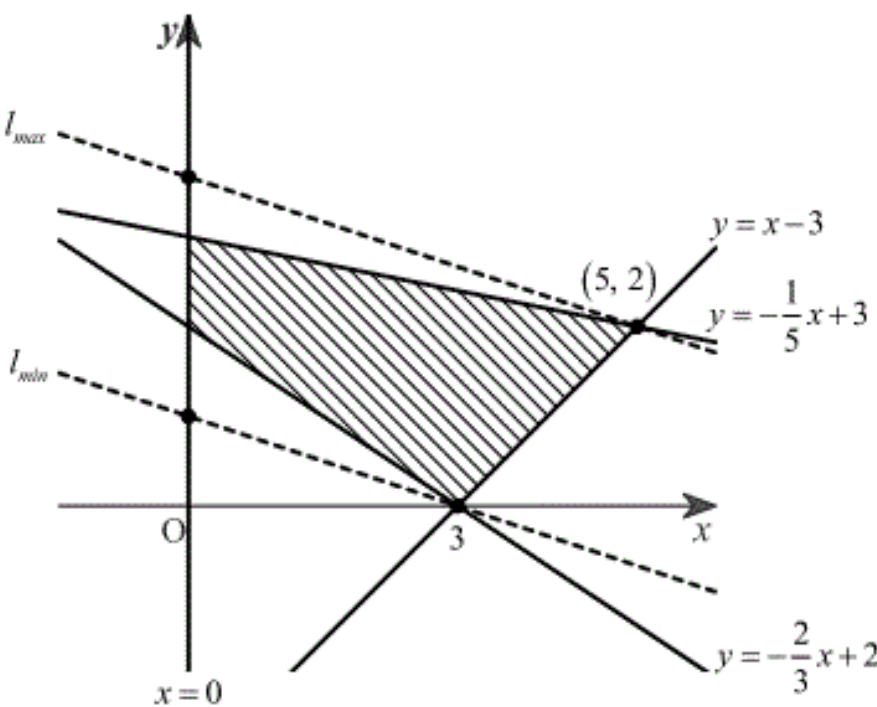
$$\begin{aligned}a^4+c^2a^2-b^2c^2-b^4&=0\\ \Leftrightarrow (a^4-b^4)+c^2(a^2-b^2)&=0\\ \Leftrightarrow (a^2+b^2)(a^2-b^2)+c^2(a^2-b^2)&=0\\ \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(a+b)(a-b)&=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

であるが、上図の $\triangle ABC$ においては $a>0$ 、 $b>0$ であるから、 $\textcircled{1}\Leftrightarrow a=b$ である。このことと、 $\triangle ABC$ についての余弦定理から、

$$\begin{aligned}8^2&=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ\\ \Leftrightarrow 64&=2a^2-2a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ \Leftrightarrow a^2&=\frac{64}{3}\\ \Leftrightarrow a&=\frac{8}{3}\sqrt{3}\left(\because a>0\right)\end{aligned}$$

となる。

(4)



領域 D は上の斜線部(境界を含む)のようになる。ここで、 $x+3y=k$ とおくと、 k がとりうる値の範囲は直線 $l:x+3y=k$ が領域 D と共有点をもつような k の範囲と一致する。ここで、

$$x+3y=k\Leftrightarrow y=-\frac{x}{3}+\frac{k}{3}\text{ である。}$$

k の最大値、最小値をそれぞれ $k_{\max}$ 、 $k_{\min}$ とすると、直線 l の傾き $-\frac{1}{3}$ について $-\frac{2}{3}<-\frac{1}{3}<-\frac{1}{5}$

となることから、直線 $l_{\max}:y=-\frac{x}{3}+\frac{k_{\max}}{3}$ 、 $l_{\min}:y=-\frac{x}{3}+\frac{k_{\min}}{3}$ は上図のようにそれぞれ領域 D の

境界の端点 $(5, 2)$ 、 $(3, 0)$ で領域 D と接する。以上から、

$$\begin{aligned}k_{\max}&=5+3\cdot 2=11\\ k_{\min}&=3+3\cdot 0=3\end{aligned}$$

となる。よって、 k の最小値は3、最大値は11である。

【2】

〔解答〕

(1)	17	18	19	20	21	22	
	6	1	2	2	1	4	
(2)	23	24	25	26	27	28	
	1	2	3	3	3	2	
(3)	29	30	31	32	33		
	1	1	6	3	2		
(4)	34	35	36	37	38	39	40
	5	5	5	5	3	7	1

〔解説〕

(1)

$\vec{a} = (1-t, 2-t, 2t+3)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ について,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1-t) \cdot 1 + (2-t) \cdot 1 + (2t+3) \cdot 1 = 6$$

となる。また, $\vec{a} - \vec{b} = (1-t, 2-t, 2t+3) - (1, 1, 1) = (-t, 1-t, 2t+2)$ であるから,

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (-t)^2 + (1-t)^2 + (2t+2)^2 \\ &= t^2 + (1-2t+t^2) + (4t^2+8t+4) \\ &= 6t^2+6t+5 \\ &= 6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって, $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{7}{2}$ をとる。さらに, $|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$ であるか

ら, $|\vec{a} - \vec{b}|$ も同様に $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$ をとる。

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos x \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \\ &= -2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + 1 \\ &= -2\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{33}{32} \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq x \leq 2\pi$ より $0 \leq \frac{x}{2} \leq \pi$ であり, $0 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1$ であるから, y は $\sin\frac{x}{2} = 1$ で最小

値 $-\frac{1}{2}$ を, $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{8}$ で最大値 $\frac{33}{32}$ をとる。

(3)

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ だから, ド・モアブルの定理より $z^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ となる。よ

って, $a_n = \operatorname{Re}(z^n) = \cos\frac{n\pi}{3}$ であるから,

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 &= \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{2\pi}{3} \cos\pi \cos\frac{4\pi}{3} \cos\frac{5\pi}{3} \cos 2\pi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

となる。また,

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} = \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{(n+6)\pi}{3} = a_{n+6}$$

より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2020} a_n &= (a_1 + \cdots + a_6) + (a_7 + \cdots + a_{12}) + \cdots + (a_{2011} + \cdots + a_{2016}) + a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\ &= \underbrace{(a_1 + \cdots + a_6) + (a_7 + \cdots + a_{12}) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_6)}_{\times 336} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) \times 336 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(4)

P を因数分解すると,

$$\begin{aligned} P &= a^4 - 25a^2 - 50a - 25 \\ &= a^4 - 25(a+1)^2 \\ &= \{a^2 + 5(a+1)\} \{a^2 - 5(a+1)\} \\ &= (a^2 + 5a + 5)(a^2 - 5a - 5) \end{aligned}$$

となる。ここで, $|P|$ が素数となる必要条件是 $a^2 + 5a + 5 = \pm 1$ または $a^2 - 5a - 5 = \pm 1$ であり,

$$\begin{aligned} a^2 + 5a + 5 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + 5a + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1, -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 5a + 5 &= -1 \\ \Leftrightarrow a^2 + 5a + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -2, -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 5a - 5 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 - 5a - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1, 6 \end{aligned}$$

となる。また, $a^2 - 5a - 5 = -1$ は整数解を持たない。したがって, $|P|$ が素数となる必要条件は a が $-4, -3, -2, -1, 6$ のいずれかに等しいことである。

$a = -4$ のとき, $|P| = |31| = 31$ であるから, $|P|$ は素数である。

$a = -3$ のとき, $|P| = |-19| = 19$ であるから, $|P|$ は素数である。

$a = -2$ のとき, $|P| = |-9| = 9 = 3^2$ であるから, $|P|$ は素数ではない。

$a = -1$ のとき, $|P| = |1| = 1$ であるから, $|P|$ は素数ではない。

$a = 6$ のとき, $|P| = |71| = 71$ であるから, $|P|$ は素数である。

以上から, $|P|$ が素数となるような整数 a は全部で 3 個あり, それらのうち最大の素数は 71 である。

[3]

〔解答〕

(1)	41	42	43	44	
	1	8	9	2	
(2)	45	46	47	48	49
	4	0	2	4	3
(3)	50	51	52	53	54
	7	3	7	2	9

〔解説〕

(1)

$n=50$ のとき、2以下の目が x 回出たならば3以上の目は $(50-x)$ 回出ているから、各自の得点がともに k 点であったとすると、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 10+x+2(50-x)=k \\ 6+3x+(50-x)=k \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -x+110=k \\ 2x+56=k \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ k=92 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x=18$ であり、そのときの各自の点数は92点である。

(2)

$n=5$ のとき、2以下の目が x 回出たならば3以上の目は $(5-x)$ 回出ているから、A君とB君の得点がちょうど等しくなる条件は、

$$\begin{aligned} & 10+x+2(5-x)=6+3x+(5-x) \\ & \Leftrightarrow 20-x=11+2x \\ & \Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

である。したがって、求める確率は、

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 10 \cdot \frac{2^3}{3^5} = \frac{40}{243}$$

となる。

(3)

$n=6$ のとき、2以下の目が x 回出たならば3以上の目は $(6-x)$ 回出ているから、A君の得点がB君の得点より小さくなる条件は、

$$\begin{aligned} & 10+x+2(6-x) < 6+3x+(6-x) \\ & \Leftrightarrow 22-x < 12+2x \\ & \Leftrightarrow \frac{10}{3} < x \end{aligned}$$

となり、条件を満たす x は $x=4, 5, 6$ のみである。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} & {}_6C_4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 + {}_6C_5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{6}\right) + {}_6C_6 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^6 \\ & = 15 \cdot \frac{2^4}{3^6} + 6 \cdot \frac{2^5}{3^6} + \frac{1}{3^6} \\ & = \frac{60}{729} + \frac{12}{729} + \frac{1}{729} \\ & = \frac{73}{729} \end{aligned}$$

となる。

[4]

(1)

$f(x) = \frac{e^x}{x^2(1+e^x)}$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot x^2(1+e^x) - e^x \cdot \{2x + (x^2 e^x)'\}}{\{x^2(1+e^x)\}^2} \\ &= \frac{e^x \cdot x^2(1+e^x) - e^x \cdot \{2x + (2xe^x + x^2 e^x)\}}{x^4(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(x + xe^x - 2 - 2e^x - xe^x)}{x^3(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(x - 2 - 2e^x)}{x^3(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad f'(x) = \frac{e^x(x - 2 - 2e^x)}{x^3(1+e^x)^2}$$

(2)

区間 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において, $x - 2 < 0, -2e^x < 0$ だから, $x - 2 - 2e^x < 0$ である。また,

$0 < x, 0 < e^x < 1 + e^x$ だから, $\frac{e^x}{x^3(1+e^x)^2} > 0$ である。以上から,

$f'(x) = \frac{e^x}{x^3(1+e^x)^2} \cdot (x - 2 - 2e^x) < 0$ となるから, $f(x)$ は区間内で単調減少である。

(証明終)

(3)

与えられた不等式を変形して,

$$\begin{aligned} 1 - px^2 &\leq \frac{1}{1+e^x} \leq 1 - qx^2 \\ \Leftrightarrow qx^2 - 1 &\leq -\frac{1}{1+e^x} \leq px^2 - 1 \\ \Leftrightarrow qx^2 &\leq 1 - \frac{1}{1+e^x} \leq px^2 \\ \Leftrightarrow qx^2 &\leq \frac{e^x}{1+e^x} \leq px^2 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで, $\textcircled{1}$ の不等式は区間 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において考えているため, この範囲では $x^2 \neq 0$ であり,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \Leftrightarrow q &\leq \frac{e^x}{x^2(1+e^x)} \leq p \\ \Leftrightarrow q &\leq f(x) \leq p \end{aligned}$$

となる。ここで, (2) より区間 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は単調減少だから, $f(x)$ の値域は

$$f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right), \text{ すなわち } \frac{e}{1+e} \leq f(x) \leq \frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \text{ となる。}$$

以上から, 区間 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ において常に $1 - px^2 \leq \frac{1}{1+e^x} \leq 1 - qx^2$ が成り立つための条件は,

$$\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \leq p \text{ かつ } q \leq \frac{e}{1+e} \text{ であることである。これらを満たす } p, q \text{ の組のうち, } |p - q| \text{ を最小}$$

にするのは $p = \frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}, q = \frac{e}{1+e}$ となる。

$$(答) \quad p = \frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}, q = \frac{e}{1+e}$$

【5】

(1)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ より,}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

である。 $(1+x^2)^2 > 0$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

したがって、関数 $y = f(x)$ は $x = -1$ で極小値 $-\frac{1}{2}$ を、 $x = 1$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \begin{cases} x = -1 \text{ のとき, 極小値 } -\frac{1}{2} \\ x = 1 \text{ のとき, 極大値 } \frac{1}{2} \end{cases}$$

(2)

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

である。よって、 $x > 0$ において $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ であり、 $x = \sqrt{3}$ の前後で $f''(x)$ の正負は

変化するから、点 $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ は変曲点である。よって、 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f(\sqrt{3}) &= f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{8}(x - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) y = -\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(3)

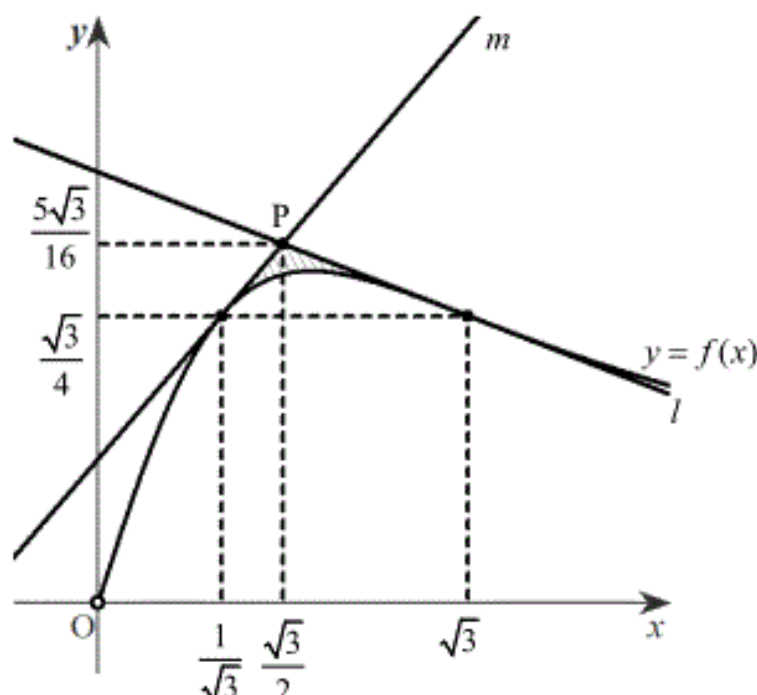
m の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{\sqrt{3}}{4} &= f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3}{8}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。よって、 ℓ と m の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8} &= \frac{3}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{16}$ より ℓ と m の交点は $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{16}\right)$ である。



以上から、求める上図の斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \left(\frac{3}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{x}{1+x^2} \right\} dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \left\{ \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) - \frac{x}{1+x^2} \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{3}{16}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}x \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left[-\frac{1}{16}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8}x \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} - \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \left(\frac{21}{64} - \frac{3}{16} \right) + \left(\frac{15}{16} - \frac{33}{64} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\log 4 - \log \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{9}{16} - \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{9}{16} - \frac{1}{2} \log 3$$