

I

〔解答〕

(1)	1	2	3
	3	0	6
(2)	4	5	
	7	2	
(3)	6	7	8
	−	1	2
(4)	9	10	
	2	6	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{6}\end{aligned}$$

となる。

(2)

交点 A, B の座標を求める。円と直線の方程式を連立すると、

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+8y=0 & \cdots \textcircled{1} \\ y=-x-2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。②を①に代入して y を消去して解くと、

$$\begin{aligned}x^2+(-x-2)^2-6x+8(-x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2-10x-12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-5x-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 6\end{aligned}$$

である。よって、②にこれらの値を代入して求めると、A, B の座標は $(-1, -1)$, $(6, -8)$ である。したがって、線分 AB の長さは、

$$\sqrt{(6+1)^2+(-8+1)^2}=7\sqrt{2}$$

となる。

(3)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9 &< 0 \\ \Leftrightarrow 3\cdot (3^x)^2-28\cdot 3^x+9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (3\cdot 3^x-1)(3^x-9) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 3^x < 9 \\ \Leftrightarrow 3^{-1} < 3^x < 3^2\end{aligned}$$

となる。関数 $y=3^x$ は単調増加するから、求める解は

$$-1 < x < 2$$

である。

(4)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}|z+3i| &= \sqrt{2}|z+2| \\ \Leftrightarrow |z+3i|^2 &= 2|z+2|^2 \\ \Leftrightarrow (z+3i)(\bar{z}-3i) &= 2(z+2)(\bar{z}+2) \\ \Leftrightarrow z\bar{z}-3iz+3i\bar{z}+9 &= 2(z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4) \\ \Leftrightarrow z\bar{z}+(4+3i)z+(4-3i)\bar{z}-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+4-3i)(\bar{z}+4+3i) &= 26 \\ \Leftrightarrow |z+4-3i|^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow |z+4-3i| &= \sqrt{26}\end{aligned}$$

となる。したがって、点 z の軌跡は半径 $\sqrt{26}$ の円である。

II

〔解答〕

(1)	11	12	13
	4	4	3
(2)	14	15	
	2	3	

〔解説〕

(1)

与えられた式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= 3\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 3\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) + 5\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 3\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right) \\
 &= 4\sin\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta
 \end{aligned}$$

と変形できる。

(2)

(1)の式を更に変形すると,

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= 4\sin\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta \\
 &= 8\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\
 &= 8\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

となる。よって, 方程式 $f(\theta) = 0$ は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形される。 $0 \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ のとき $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi$ であるから, $\textcircled{1}$ の解は,

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \pi$$

である。したがって, 方程式 $f(\theta) = 0$ の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	16	17	18	19	20
	2	6	2	3	3
(2)	21	22	23	24	25
	4	9	4	2	3

〔解説〕

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。角度と内積の値を用いると、

$$|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos 45^\circ = 12$$

$$\therefore |\vec{a}||\vec{b}| = 12\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}||\vec{c}| \cdot \cos 30^\circ = 9$$

$$\therefore |\vec{b}||\vec{c}| = 6\sqrt{3}$$

$$|\vec{c}||\vec{a}| \cdot \cos 60^\circ = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore |\vec{c}||\vec{a}| = 6\sqrt{6}$$

と分かる。これらの辺々をかけると、

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 = 2 \cdot 6^4$$

$$\therefore |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| = 36\sqrt{2}$$

となる。よって、 $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ はそれぞれ、

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$$

$$|\vec{c}| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{36\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = 3$$

となる。したがって、

$$OA = 2\sqrt{6}, OB = 2\sqrt{3}, OC = 3$$

である。

(2)

辺 OA, OB, OC 上にそれぞれ $OP = OQ = OR = 2$ となるように点 P, Q, R をとっているから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{|\vec{c}|} \cdot \vec{c} = \frac{2}{3} \vec{c}$$

である。よって、G は $\triangle PQR$ の重心より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \vec{a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} \right) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} OG^2 &= |\overrightarrow{OG}|^2 \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{6} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{3} |\vec{b}|^2 + \frac{4}{9} |\vec{c}|^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{4}{3\sqrt{6}} \vec{c} \cdot \vec{a} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{6} \cdot 24 + \frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{4}{9} \cdot 9 + \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot 12 + \frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot 9 + \frac{4}{3\sqrt{6}} \cdot 3\sqrt{6} \right) \\ &= \frac{1}{9} (4 + 4 + 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 4) \\ &= \frac{4}{9} (4 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

IV

【解答】

(1)	26	27	28	29	30	31	32
	1	1	2	0	1	2	0
(2)	33	34	35				
	5	1	2				
(3)	36	37					
	1	7					

【解説】

(1)

3 回目に球を取り出したときに A が勝つのは、赤球が 3 回連続で取り出されたときである。よって、その確率は、

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

となる。また、5 回目に球を取り出したときに A が勝つのは、5 回目までに赤球と白球が 2 個ずつ取り出され、5 回目に赤球が取り出されたときである。よって、その確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_7C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_4} \cdot \frac{1}{6} &= \frac{21 \cdot 3}{210} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

となる。

(2)

A が勝つのは、3, 5, 7, 9 回目のいずれかにおいて、3 個目の赤球が取り出されたときである。7 回目に 3 個目の赤球が取り出されるのは、7 回目までに赤球が 2 個と白球が 4 個取り出され、7 回目に赤球が取り出されたときである。よって、その確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_7C_4 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_6} \cdot \frac{1}{4} &= \frac{35 \cdot 3}{210} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と求まる。同様に、9 回目に 3 個目の赤球が取り出されるのは、9 回目までに赤球が 2 個と白球が 6 個取り出され、9 回目に赤球が取り出されたときである。よって、その確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_7C_6 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_8} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{7 \cdot 3}{45} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

である。それぞれ 3, 5, 7, 9 回目に 3 個目の赤球が取り出されるという事象は互いに排反である。したがって、A が勝つ確率は、

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{7}{30} = \frac{5}{12}$$

である。

(3)

勝敗は必ずつくため、(2)より B が勝つ確率は

$$1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

である。B が 6 回目に球を取り出して勝つのは、6 回目までに赤球が 2 個と白球が 3 個取り出され、6 回目に赤球が取り出されたときである。よって、その確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_7C_3 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_5} \cdot \frac{1}{5} &= \frac{35 \cdot 3}{252} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

である。したがって、求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}$$

である。

〔解答〕

(1)	38	39	
	1	3	
(2)	40	41	42
	1	0	3
(3)	43	44	45
	1	1	5

〔解説〕

(1)

以下 5 を法として考える。 $a_n = 3^n, a_n \equiv b_n$ であるから、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\equiv a_{n+1} \\ &\equiv 3a_n \\ &\equiv 3b_n \end{aligned}$$

となる。 $a_1 = 3$ より、 $b_1 = 3$ であるから、以降、順に b_n を求めていくと、

$$\begin{aligned} b_2 &\equiv 3 \cdot 3 \\ &\equiv 9 \\ &\equiv 4 \end{aligned}$$

$$\therefore b_2 = 4$$

$$\begin{aligned} b_3 &\equiv 3 \cdot 4 \\ &\equiv 12 \\ &\equiv 2 \end{aligned}$$

$$\therefore b_3 = 2$$

$$\begin{aligned} b_4 &\equiv 3 \cdot 2 \\ &\equiv 6 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\therefore b_4 = 1$$

$$\begin{aligned} b_5 &\equiv 3 \cdot 1 \\ &\equiv 3 \end{aligned}$$

$$\therefore b_5 = 3$$

となる。したがって、

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 3 + 4 + 2 + 1 + 3 = 13$$

である。

(2)

任意の自然数 k について

$$\begin{aligned} b_{k+4} &\equiv 3^4 \cdot b_k \\ &\equiv 1 \cdot b_k \\ &\equiv b_k \end{aligned}$$

$$\therefore b_{k+4} = b_k$$

が成り立つ。よって、 b_1 から b_5 までは(1)の通りであるから、数列 $\{b_n\}$ は、3, 4, 2, 1 の繰り返しとなる。したがって、

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k = n \cdot (3 + 4 + 2 + 1) + b_{4n+1} = 10n + 3$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4n+1} a_k &= \sum_{k=1}^{4n+1} 3^k \\ &= 3 \cdot \frac{3^{4n+1} - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3}{2} (3^{4n+1} - 1) \end{aligned}$$

である。よって、(2)より、

$$\begin{aligned} S_{4n+1} &= \left(\sum_{k=1}^{4n+1} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{4n+1} b_k \right) \\ &= \frac{3}{2} (3^{4n+1} - 1) (10n + 3) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_{4n+1}}{S_{4n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^{4n+1}}{\frac{3}{2} (3^{4n+1} - 1) (10n + 3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(3 - \frac{1}{3^{4n}} \right) \left(10 + \frac{3}{n} \right)} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 10} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

である。

VI

〔解答〕

(1)	46	47	48	49		
	2	2	4	4		
(2)	50	51	52	53	54	55
	1	1	1	2	3	2

〔解説〕

(1)

関数 $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$ について、

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(x-2)e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}(x-2)e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(x-4)e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

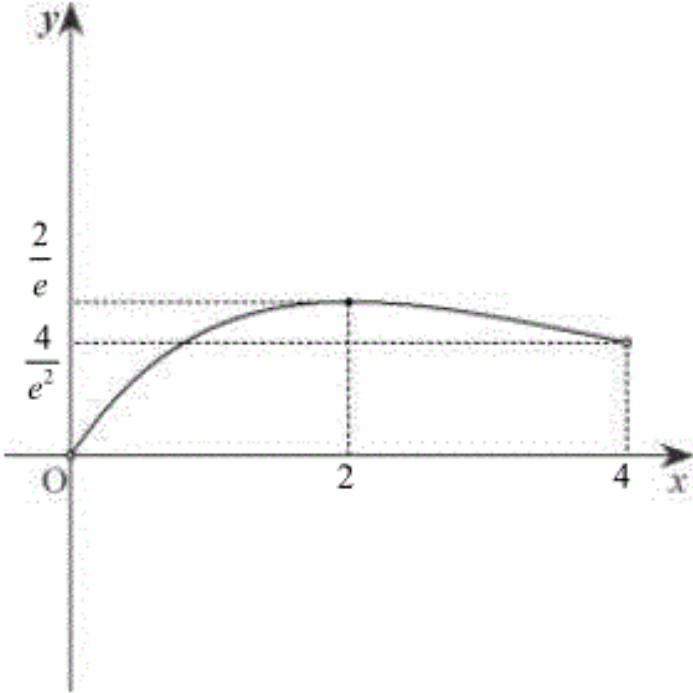
である。 $e^{-\frac{x}{2}}>0$ より、 $f'(x)=0$ を解くと $x=2$ であり、 $f''(x)=0$ を解くと $x=4$ である。よって、 $f(x)$ についての増減表は以下のようになる。

x	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

したがって、 $f(x)$ は $x=2$ で極大値 $\frac{2}{e}$ をとり、曲線 C の変曲点 A の座標は $\left(4, \frac{4}{e^2}\right)$ である。

(2)

曲線 $C(0<x<4)$ を図示すると以下のようになる。



$0<x<4$ において曲線 C は上に凸であるから上図より、曲線 C と直線 l が $0<x<4$ で共有点をもつのは、直線 l が、点 $\left(4, \frac{4}{e^2}\right)$ を通るときの傾きと、点 $(0, 0)$ で曲線 C と接するときの傾きの間の傾きのときである。(ただしそれ自体は含まない。) 直線 l が点 $\left(4, \frac{4}{e^2}\right)$ を通るとき、傾き a は

$$\begin{aligned}\frac{4}{e^2} &= a \cdot 4 \\ \therefore a &= \frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

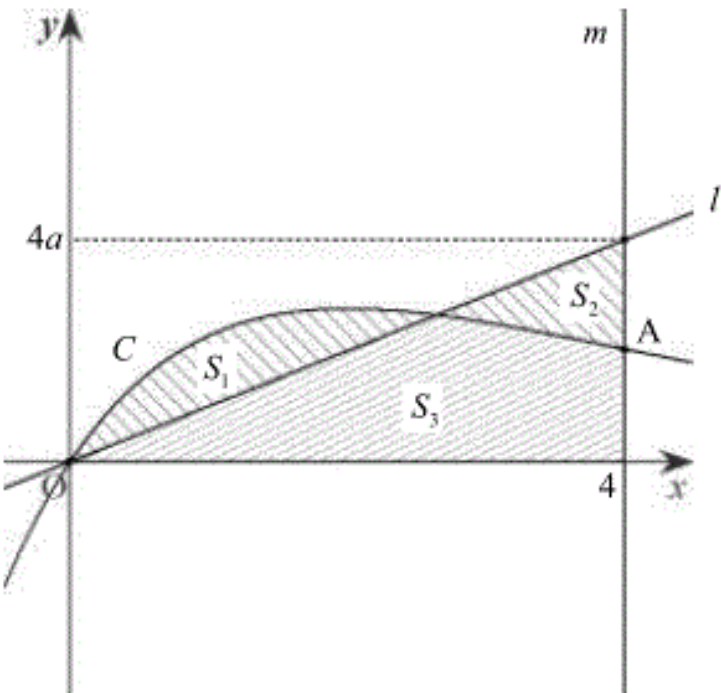
である。点 $(0, 0)$ で曲線 C と接するとき、傾き a は

$$\begin{aligned}a &= f'(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

である。したがって、曲線 C と直線 l が $0<x<4$ で共有点をもつとき、

$$\frac{1}{e^2} < a < 1$$

である。次に、曲線 C と直線 l 、直線 m を図示すると以下のようになる。



x 軸と曲線 C 、直線 l 、直線 m に囲まれた部分の面積を S_3 とすると、

$$\begin{aligned}S_1 + S_3 &= \int_0^4 xe^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 2e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{8}{e^2} + \left[-4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4 \\ &= -\frac{8}{e^2} - \frac{4}{e^2} + 4 \\ &= 4 - \frac{12}{e^2}\end{aligned}$$

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4a = 8a$$

と求まる。したがって、 $S_1 = S_2$ となるとき、

$$\begin{aligned}S_1 + S_3 &= S_2 + S_3 \\ \Leftrightarrow 4 - \frac{12}{e^2} &= 8a \\ \therefore a &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2e^2}\end{aligned}$$

となる。