

〔解答〕

(1)	1	2	3	4
	－	1	0	1
(2)	5	6	7	8
	3	5	1	2
(3)	9			
	6			
(4)	10	11	12	
	1	0	0	
(5)	13			
	8			

〔解説〕

(1)

$f(x) = a^2x^2 - 3ax + 2a - 2$ とおくと、 $a^2 > 0$ であるから、 $y = f(x)$ は下に凸な放物線である。
 $f(x) = 0$ が $x < 0$ と $1 < x$ の範囲に実数解を1つずつ持つことは、 $y = f(x)$ が $x < 0$ と $1 < x$ で1回ずつ x 軸と共有点を持つことと同値である。したがって、条件は

$$\begin{aligned} f(0) < 0 \text{ かつ } f(1) < 0 \\ \Leftrightarrow 2a - 2 < 0 \text{ かつ } a^2 - a - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow a < 1 \text{ かつ } -1 < a < 2 \\ \Leftrightarrow -1 < a < 1 \end{aligned}$$

である。 $a \neq 0$ であることに注意して、求める a の範囲は

$$-1 < a < 0 \text{ または } 0 < a < 1$$

である。

(2)

$\angle BAC$ の二等分線が線分ADより

$$\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$$

となる。 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の面積の合計が $\triangle ABC$ の面積に等しいことから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ \\ \Leftrightarrow 12AD &= 35 \\ \therefore AD &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \frac{1}{100}$ となる自然数 n の最小値を求める。両辺正であるから、

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{2}{5}\right)^n &\leq \log_{10} \frac{1}{100} \\ \Leftrightarrow n(2\log_{10} 2 - 1) &\leq -2 \\ \Leftrightarrow -0.3980n &\leq -2 \\ \Leftrightarrow n &\geq 5.02... \end{aligned}$$

となる。したがって n の最小値は6である。

(4)

x^{50} を $x^3 - 1$ で割ったときの商を $g(x)$ とおくと、

$$x^{50} = (x^3 - 1)g(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots \text{①}$$

である。式①の両辺に $x = 1$ を代入すると

$$1 = a + b + c \quad \cdots \text{②}$$

となる。ここで

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

であり、 $x^2 + x + 1 = 0$ の解のうちの一つを ω とおくと、 ω は実数ではない。このとき

$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ が成立する。式①の両辺に $x = \omega$ を代入して

$$\begin{aligned} (\omega^3)^{16} \cdot \omega^2 &= a\omega^2 + b\omega + c \\ \Leftrightarrow \omega^2 &= a\omega^2 + b\omega + c \\ \Leftrightarrow -\omega - 1 &= a(-\omega - 1) + b\omega + c \\ \Leftrightarrow \omega(a - b - 1) + (a - c - 1) &= 0 \end{aligned}$$

である。 $a - b - 1, a + c - 1$ はともに実数であるから、

$$a - b - 1 = 0, a + c - 1 = 0 \quad \cdots \text{③}$$

である。式②と③を連立して、 $a = 1, b = 0, c = 0$ である。

(5)

データの数値を x_i 、平均値を $\bar{x}$ とおくと、分散は $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ で表される。 $x_i - \bar{x}$ がもとの2倍になるから、分散はもとの4倍である8となる。

II

〔解答〕

(1)	14	15	16		
	1	6	4		
(2)	17	18	19	20	21
	2	1	1	2	8

〔解説〕

(1)

$M - m = 0$ となるとき、4 回すべてで同じ数字が出ている。よって求める確率は

$$\frac{4}{4^4} = \frac{1}{64}$$

である。

(2)

$M - m = 1$ となるとき、出た数字の組み合わせは、1 と 2 のみ、または 2 と 3 のみ、または 3 と 4 のみである。各組み合わせについて、

$$\begin{aligned} \frac{2^4 - 2 \cdot 1^4}{4^4} &= \frac{14}{256} \\ &= \frac{7}{128} \end{aligned}$$

であるから、求める確率は

$$3 \cdot \frac{7}{128} = \frac{21}{128}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	22	23	24	25	26		
	1	4	—	7	8		
(2)	27	28	29	30	31	32	33
	8	8	1	1	7	3	2

〔解説〕

(1)

△ABC において余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

である。よって 2 倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = -\frac{7}{8}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1\end{aligned}$$

であるから, (1)の結果を使用して,

$$\cos 4\theta = \frac{8}{256} - \frac{8}{16} + 1 = \frac{17}{32}$$

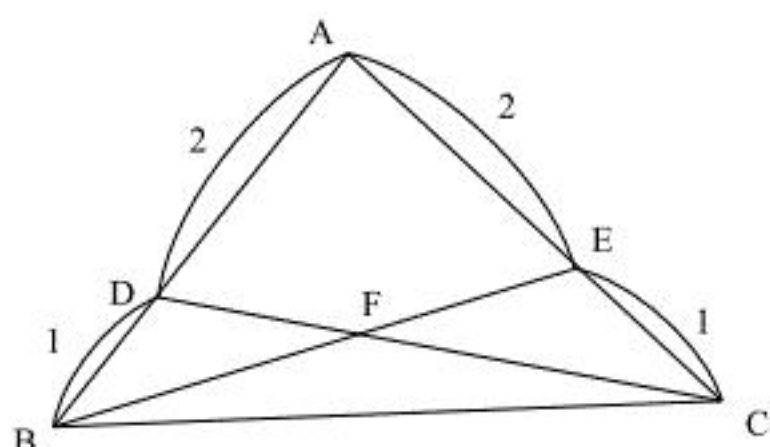
である。

IV

〔解答〕

(1)	34	35	36			
	2	2	5			
(2)	37	38				
	1	4				
(3)	39	40	41	42	43	44
	5	2	1	6	2	5

〔解説〕



(1)

$\triangle ABC$ においてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF}{FE} \cdot \frac{EC}{CA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{BF}{FE} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BF}{FE} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5} \end{aligned}$$

である。

(2)

点 F が三角形 ABC の外心であるとき、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AF}| &= |\overrightarrow{BF}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AF}|^2 &= |\overrightarrow{BF}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AF}|^2 &= |\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{5}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(3)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{p}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{q}\overrightarrow{AQ}\right) \end{aligned}$$

であるから、直線 PQ が点 F を通る時、

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

を満たす。ここで

$$\triangle APQ = pq\triangle ABC = pq$$

である。 $p > 0, q > 0$ より、 $\frac{1}{p} > 0, \frac{1}{q} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{pq}} &\leq \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{pq} &\leq \frac{25}{16} \\ \Leftrightarrow pq &\geq \frac{16}{25} \end{aligned}$$

である(等号は $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ のとき、すなわち $p = q = \frac{4}{5}$ のとき成立)。したがって $\triangle APQ$ の面積の最

小値は $\frac{16}{25}$ である。

〔解答〕

(1)	45	46					
	2	9					
(2)	47	48	49	50			
	9	7	2	9			
(3)	51	52	53	54	55	56	57
	2	2	6	4	2	1	4

〔解説〕

- (1) 正方形 $A_n B_n C_n D_n$ の一辺の長さを a_n とすると、

$$\begin{aligned} A_n B_n &= A_n A_{n+1} + A_{n+1} B_n \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} a_{n+1} + \sqrt{2} a_{n+1} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{3} a_n \\ \therefore a_n &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{n-1} \quad (\because a_1 = 1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$S_n = a_n^2 = \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1}$$

であるから、 $S_2 = \frac{2}{9}$ である。

- (2) $\{S_n\}$ は初項1、公比 $\frac{2}{9}$ の等比数列であるから、

$$\sum_{k=1}^n S_k = \frac{1 - \left(\frac{2}{9} \right)^n}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{9}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{9} \right)^n \right\}$$

である。

- (3) $\triangle A_n A_{n+1} D_{n+1}$ の内心を点Iとすると、 $\triangle IA_n A_{n+1}$ と $\triangle IA_{n+1} D_{n+1}$ と $\triangle ID_{n+1} A_n$ の面積の合計が $\triangle A_n A_{n+1} D_{n+1}$ の面積に等しいことから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot A_n A_{n+1} \cdot A_n D_{n+1} &= \frac{1}{2} r_n (A_n A_{n+1} + A_{n+1} D_{n+1} + A_n D_{n+1}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} \right)^2 &= \frac{1}{2} r_n \left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} + a_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} \right) \\ \Leftrightarrow r_n &= \frac{a_{n+1}}{2(\sqrt{2} + 1)} \quad (\because a_{n+1} > 0) \\ \Leftrightarrow r_n &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^n \end{aligned}$$

となる。よって、 $r_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$ である。以上より、 $\{r_n\}$ は等比数列であり、

$0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n &= \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{6}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{2(3 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{14} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	58	59	60				
	1	1	2				
(2)	61	62	63	64	65	66	67
	1	0	0	1	4	3	4

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \log(x+1) + \frac{x}{x+1} \\
 &= \log(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1
 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x+2}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

真数条件より、 $x > -1$ である。 $y = f(x)$ と $y = x$ を連立して

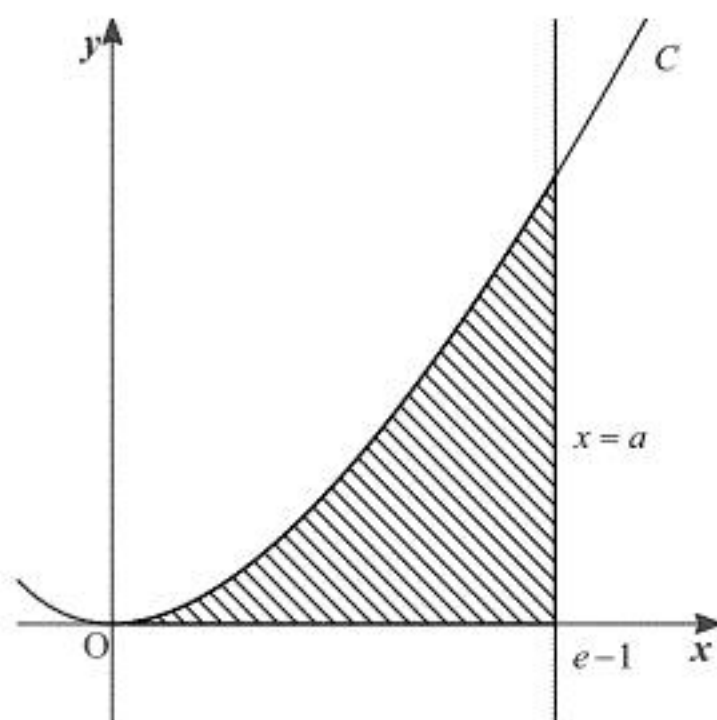
$$\begin{aligned}
 x &= x \log(x+1) \\
 \Leftrightarrow x \{ \log(x+1) - 1 \} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。 $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 \log(x+1) - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= e - 1
 \end{aligned}$$

であるから、 $a = e - 1$ である。 $x > -1$ で $f''(x) > 0$ であるから、 $f'(x)$ は単調増加である。

$f'(0) = 0$ であるから、 $x < 0$ において $f'(x) < 0$ 、 $x > 0$ において $f'(x) > 0$ である。したがって $f(x)$ は $x = 0$ において最小値をとる。よって最小値は $f(0) = 0$ である。曲線 C 、直線 $x = a$ 、および x 軸で囲まれた図形を図示すると、下図の斜線部となる。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned}
 \int_0^{e-1} x \log(x+1) dx &= \frac{1}{2} \left[x^2 \log(x+1) \right]_0^{e-1} - \frac{1}{2} \int_0^{e-1} \frac{x^2}{x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} (e-1)^2 - \frac{1}{2} \int_0^{e-1} (x-1) dx - \frac{1}{2} \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} (e-1)^2 - \frac{1}{4} \left[(x-1)^2 \right]_0^{e-1} - \frac{1}{2} \left[\log(x+1) \right]_0^{e-1} \\
 &= \frac{1}{2} (e-1)^2 - \frac{1}{4} (e-2)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

である。