

# I

【解答】

|     |               |               |               |               |              |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| (1) | <div>1</div>  | <div>2</div>  | <div>3</div>  | <div>4</div>  | <div>5</div> |
|     | －             | 1             | 3             | 1             | 7            |
| (2) | <div>6</div>  | <div>7</div>  | <div>8</div>  | <div>9</div>  |              |
|     | －             | 5             | 5             | 4             |              |
| (3) | <div>10</div> | <div>11</div> | <div>12</div> |               |              |
|     | －             | 4             | 9             |               |              |
| (4) | <div>13</div> | <div>14</div> | <div>15</div> | <div>16</div> |              |
|     | －             | 1             | 8             | 2             |              |
| (5) | <div>17</div> | <div>18</div> | <div>19</div> | <div>20</div> |              |
|     | －             | 1             | 6             | 4             |              |

【解説】

(1)

△BAD と △BCD にそれぞれ余弦定理を適用すると、

$$\cos \angle \text{BAD} = \frac{\text{AB}^2 + \text{AD}^2 - \text{BD}^2}{2 \times \text{AB} \times \text{AD}} = \frac{13 - \text{BD}^2}{12},$$

$$\cos \angle \text{BCD} = \frac{\text{BC}^2 + \text{CD}^2 - \text{BD}^2}{2 \times \text{BC} \times \text{CD}} = \frac{25 - \text{BD}^2}{24}$$

となる。また、四角形 ABCD は円に内接するので、 $\angle \text{BAD} + \angle \text{BCD} = 180^\circ$  である。よって、

$$\cos \angle \text{BAD} = \cos (180^\circ - \angle \text{BCD}) = -\cos \angle \text{BCD}$$

なので、

$$\frac{13 - \text{BD}^2}{12} = -\frac{25 - \text{BD}^2}{24}$$

である。BD > 0 に注意してこれを解くと、 $\text{BD} = \sqrt{17}$  となる。また、

$$\cos \angle \text{BAD} = \frac{13 - \text{BD}^2}{12}$$

より、

$$\cos \angle \text{BAD} = \frac{13 - \text{BD}^2}{12} = \frac{13 - 17}{12} = \frac{-1}{3}$$

となる。

(2)

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 3$  であり、

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

なので、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$  である。また、

$$|\vec{ta} + \vec{b}|^2 = (\vec{ta} + \vec{b}) \cdot (\vec{ta} + \vec{b}) = t^2 |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4t^2 - 10t + 9 = 4\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

なので、 $|\vec{ta} + \vec{b}|^2$  は  $t = \frac{5}{4}$  で最小値をとる。

(3)

頂点が  $y = 3x - 1$  上にあるので、条件をみたす関数は実数  $p$  を用いて、

$$y = (x - p)^2 + 3p - 1$$

と表される。このグラフが  $x = 2$  に関して対称なので、軸の方程式が  $x = 2$  となり、

$$p = 2$$

である。よって、求める関数は、

$$y = (x - p)^2 + 3p - 1 = (x - 2)^2 + 3 \cdot 2 - 1 = x^2 - 4x + 9$$

となる。

(4)

点 P の座標を  $(x, y)$  とする。このとき、「原点  $(0, 0)$  と点 P の距離」と「直線  $y = 4$  と点 P の距離」が等しいことから、

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y - 4|$$

が成り立つ。両辺を 2 乗すると、

$$x^2 + y^2 = y^2 - 8y + 16$$

となり、これを整理すると、

$$y = \frac{-1}{8}x^2 + 2$$

となる。逆に、 $y = \frac{-1}{8}x^2 + 2$  上の点を中心とする円は条件を満たす。よって、求める軌跡は、

$$\text{放物線 } y = \frac{-1}{8}x^2 + 2$$

である。

(5)

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

である。よって、ド・モアブルの定理より、

$$\left( \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^{12} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{12} (\cos \pi + i \sin \pi) = \frac{-1}{64}$$

となる。

## II

〔解答〕

|     |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">21</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">22</span> |                                                                |                                                                |                                                                |
|     | 2                                                              | 4                                                              |                                                                |                                                                |                                                                |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">23</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">24</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">26</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">27</span> |
|     | 1                                                              | 5                                                              | —                                                              | 3                                                              | 6                                                              |

〔解説〕

(1)

$t = 2^x$  とおくと、 $t$  の取りうる値の範囲は  $t > 0$  である。 $4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 = (2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 64$  なので、

$$f(x) = t^2 - 20t + 64 = (t - 4)(t - 16)$$

となり、 $f(x) \leq 0$  を解くと  $4 \leq t = 2^x \leq 16$ 、すなわち  $2 \leq x \leq 4$  となる。

(2)

$$f(x) = t^2 - 20t + 64 = (t - 10)^2 - 36$$

なので、 $f(x)$  は  $t = 2^x = 10$ 、すなわち  $x = \log_2 10 = 1 + \log_2 5$  のとき最小値  $-36$  をとる。

### Ⅲ

〔解答〕

|     |                                                                |                                                                |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">28</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">29</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">30</span> |
|     | 2                                                              | 4                                                              | 5                                                              |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">31</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">32</span> |                                                                |
|     | 3                                                              | 9                                                              |                                                                |
| (3) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">33</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">34</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">35</span> |
|     | －                                                              | 2                                                              | 3                                                              |

〔解説〕

(1)

条件を満たす円の方程式を  $x^2 + y^2 - ax - by - c = 0$  ( $a, b, c$  は実数) とすると、この円は点  $(2, 5)$ 、点  $(0, -1)$ 、点  $(-2, 1)$  を通ることから、

$$\begin{cases} 2a + 5b + c = 29, \\ -b + c = 1, \\ -2a + b + c = 5 \end{cases}$$

となる。これを解くと、 $a = 2$ 、 $b = 4$ 、 $c = 5$  となる。よって、求める円の方程式は、

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$$

である。

(2)

(1)より、円  $C$  の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$$

である。ここで、 $x = -1$  は円  $C$  の接線ではないので、 $(-1, 6)$  を通る円  $C$  の接線は、実数  $m$  を用いて

$$y = m\{x - (-1)\} + 6 = mx + m + 6$$

と表される。円  $C$  の半径と、「円  $C$  の中心  $(1, 2)$  と直線  $y = mx + m + 6$  の距離」が等しいので、

$$\sqrt{10} = \frac{|m - 2 + m + 6|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。これを解くと、 $m = -\frac{1}{3}, 3$  となる。よって、 $l$  の傾きは 3 であり、その方程式は

$$y = 3x + 3 + 6 = 3x + 9$$

となる。

(3)

$y = 3x + 9$  を円  $C$  の方程式  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$  に代入すると、

$$(x-1)^2 + \{(3x+9)-2\}^2 = 10$$

となる。この 2 次方程式を解くと、 $x = -2$  となり、これが円  $C$  と直線  $l$  の接点の  $x$  座標であり、 $y$  座標は、

$$3 \cdot (-2) + 9 = 3$$

となる。よって、接点の座標は  $(-2, 3)$  である。



## IV

〔解答〕

|     |              |              |              |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1) | $\boxed{36}$ | $\boxed{37}$ |              |              |              |
|     | 2            | 5            |              |              |              |
| (2) | $\boxed{38}$ | $\boxed{39}$ | $\boxed{40}$ | $\boxed{41}$ | $\boxed{42}$ |
|     | 3            | 6            | 1            | 2            | 5            |
| (3) | $\boxed{43}$ | $\boxed{44}$ | $\boxed{45}$ | $\boxed{46}$ |              |
|     | 1            | 8            | 3            | 5            |              |

〔解説〕

(1)

得点が2点となるのは、「白玉が2個取り出されたとき」および「赤玉が2個取り出されたとき」である。「白玉が2個取り出される」確率は、

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

である。また、「赤玉が2個取り出される」確率は、

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

である。「白玉が2個取り出される」という事象と「赤玉が2個取り出される」という事象は背反なので、求める確率は

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

となる。

(2)

(1)より、1回の試行を行ったときに得た得点が1点である確率は、

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

である。3回の試行で得点が5点となるのは、「2点を2回得て、1点を1回得た」ときに限る。よって、その確率は

$${}_3C_2 \left( \frac{3}{5} \right)^1 \left( \frac{2}{5} \right)^2 = \frac{36}{125}$$

である。

(3)

7回の試行で得点が11点となるのは、「2点を4回得て、1点を3回得た」ときに限る。よって、その確率は

$${}_7C_4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 \left( \frac{2}{5} \right)^4 = \frac{2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7}{5^7}$$

である。また、「3回目までの合計が5点で、かつ合計7回の試行で得点が11点となる」のは、「3回目までの合計が5点で、かつ残り4回の試行で『2点を2回得て、1点を2回得た』」ときに限る。よって、その確率は

$$\left\{ {}_3C_2 \left( \frac{3}{5} \right)^1 \left( \frac{2}{5} \right)^2 \right\} \times \left\{ {}_4C_2 \left( \frac{3}{5} \right)^2 \left( \frac{2}{5} \right)^2 \right\} = \frac{2^5 \times 3^5}{5^7}$$

である。よって、求める条件つき確率は、

$$\frac{\left\{ {}_3C_2 \left( \frac{3}{5} \right)^1 \left( \frac{2}{5} \right)^2 \right\} \times \left\{ {}_4C_2 \left( \frac{3}{5} \right)^2 \left( \frac{2}{5} \right)^2 \right\}}{{}_7C_4 \left( \frac{3}{5} \right)^3 \left( \frac{2}{5} \right)^4} = \frac{\frac{2^5 \times 3^5}{5^7}}{\frac{2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7}{5^7}} = \frac{18}{35}$$

となる。

〔解答〕

|     |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">47</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">48</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">49</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span> |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |
|     | 6                                                              | 6                                                              | 1                                                              | 2                                                              |                                                                |                                                                |                                                                |                                                                |
| (2) | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">51</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">52</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">53</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">54</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">55</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">56</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">57</span> | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">58</span> |
|     | —                                                              | 6                                                              | 1                                                              | 5                                                              | 3                                                              | 1                                                              | 2                                                              | 8                                                              |

〔解説〕

(1)

数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とすると、 $\{b_n\}$  は初項 3、公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列なので、一般項は

$$b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。よって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $n \geq 2$  のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = a + 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = a + 6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。これは  $n=1$  のときも成り立つ。よって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = a + 6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

(2)

数列  $\{a_n\}$  が等比数列ならば、数列  $a_1, a_2, a_3$  も等比数列である。よって、等比中項の関係式

$$a_2^2 = a_1 a_3$$

が成り立つ。 $a_2 = a + 3$ 、 $a_3 = a_1 + 3 + \frac{3}{2} = a + \frac{9}{2}$  なので、

$$(a+3)^2 = a \left(a + \frac{9}{2}\right)$$

である。これを解くと、 $a = -6$  である。逆にこのとき、

$$a_n = -6 + 6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なので、確かに数列  $\{a_n\}$  は等比数列となっている。よって、求める値は  $a = -6$  である。

また、

$$\sqrt{|a_n|} = \sqrt{\left| -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right|} = \sqrt{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

より、数列  $\{\sqrt{|a_n|}\}$  は初項  $\sqrt{6}$ 、公比  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  の等比数列なので、

$$\sum_{k=1}^8 \sqrt{|a_k|} = \sqrt{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{15\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{8}$$

となる。

# VI

【解答】

|     |                                                  |                                                  |                                                  |                                                  |                                                  |                                                  |
|-----|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| (1) | <span style="border: 1px solid black;">59</span> | <span style="border: 1px solid black;">60</span> | <span style="border: 1px solid black;">61</span> | <span style="border: 1px solid black;">62</span> | <span style="border: 1px solid black;">63</span> | <span style="border: 1px solid black;">64</span> |
|     | 1                                                | 2                                                | 1                                                | 3                                                | 1                                                | 2                                                |
| (2) | <span style="border: 1px solid black;">65</span> | <span style="border: 1px solid black;">66</span> | <span style="border: 1px solid black;">67</span> | <span style="border: 1px solid black;">68</span> | <span style="border: 1px solid black;">69</span> | <span style="border: 1px solid black;">70</span> |
|     | 9                                                | 2                                                | 2                                                | 9                                                | 7                                                | 5                                                |

【解説】

(1)

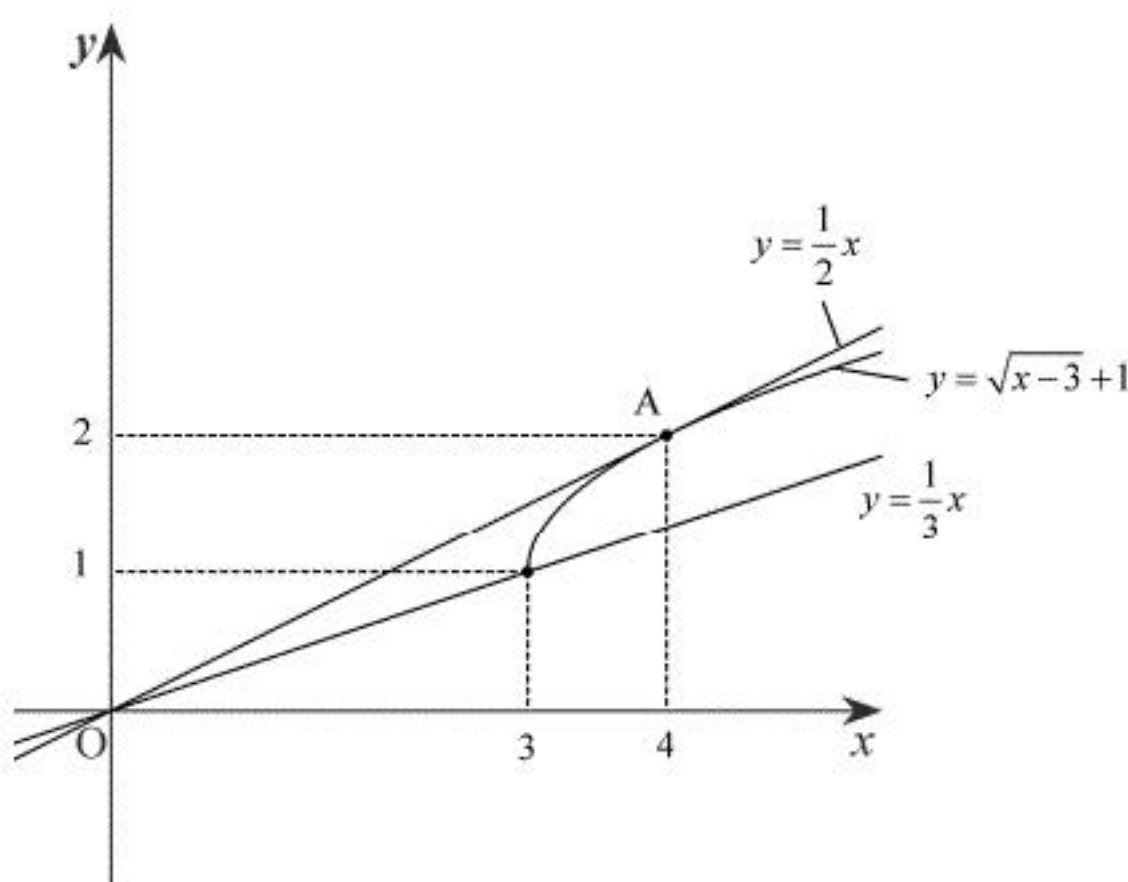
曲線  $C$  の方程式を  $y = f(x)$ 、直線  $l$  の方程式を  $y = g(x)$  とする。このとき、

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

である。点  $A(4, 2)$  における  $C$  の接線の傾きは、 $f(x)$  の  $x = 4$  における微分係数の値に等しいから、

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4-3}} = \frac{1}{2}$$

となる。また、直線  $l$  が点  $(3, 1)$  を通るとき、その傾きは  $\frac{1}{3}$  である。



よって、上図より、曲線  $C$  と直線  $l$  が共有点を 2 つもつような  $a$  のとり得る値の範囲は、

$$\frac{1}{3} \leq a < \frac{1}{2}$$

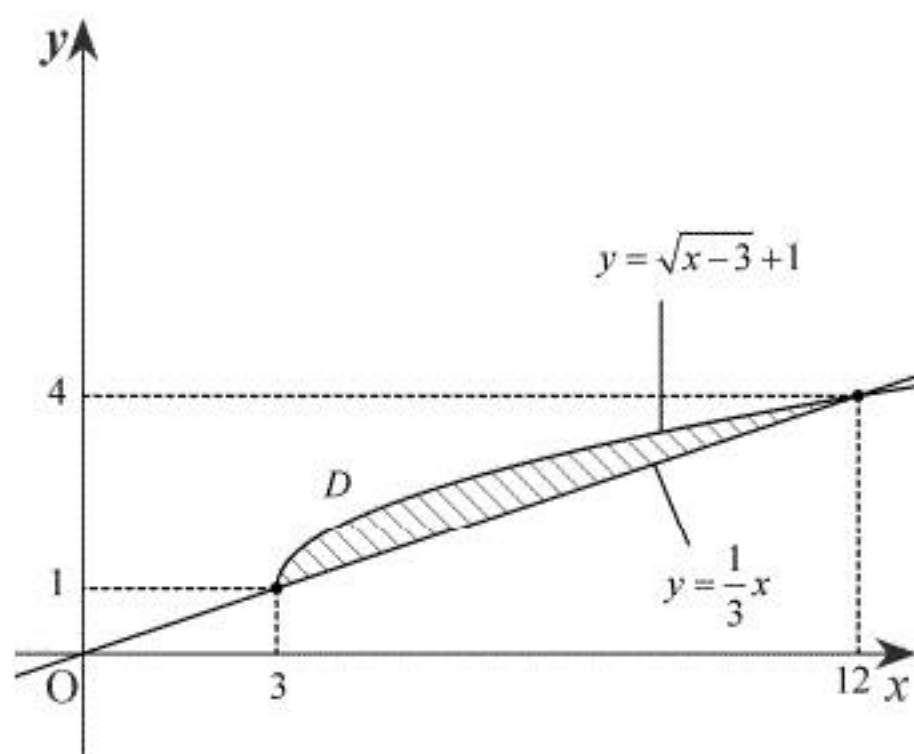
である。

(2)

$a = \frac{1}{3}$  のとき、曲線  $C$  と直線  $l$  の交点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-3} + 1, \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

の解である。これを解くと、 $(x, y) = (3, 1), (12, 4)$  である。



ここで、 $3 \leq x \leq 12$  のとき、

$$y = \sqrt{x-3} + 1 \Leftrightarrow x = y^2 - 2y + 4,$$

$$y = \frac{1}{3}x \Leftrightarrow x = 3y$$

である。よって、求める面積を  $S$  とすると、

$$S = \int_1^4 \{3y - (y^2 - 2y + 4)\} dy = -\int_1^4 (y-1)(y-4) dy = \frac{(4-1)^3}{6} = \frac{9}{2}$$

である。また、求める体積を  $V$  とすると、

$$V = \pi \int_1^4 \{(3y)^2 - (y^2 - 2y + 4)^2\} dy = \pi \int_1^4 (-y^4 + 4y^3 - 3y^2 + 16y - 16) dy = \frac{297}{5} \pi$$

である。

(2) [別解] (交点の座標を求める部分までは同じ)

求める面積を  $S$  とすると、

$$S = \int_3^{12} \left\{ (\sqrt{x-3} + 1) - \left( \frac{1}{3}x \right) \right\} dx = \left[ \frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3} + x - \frac{x^2}{6} \right]_3^{12} = \frac{9}{2}$$

である。