

数 学

1 ～ 6 ページ (問題は1, 3, 5ページにあります。)

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答時間は 60 分間です。
3. 解答用紙は数学解答用紙 1 枚 (2 ページ綴り) です。
4. 受験番号を、数学解答用紙の所定欄 (ページごとに合計 2 箇所) に記入しなさい。
5. 試験開始後、ただちにページ数を確認し、落丁や印刷の不鮮明なものがあれば申し出なさい。
6. 試験終了後、数学解答用紙 1 枚 (2 ページ綴り) を提出しなさい。
問題冊子は持ち帰りなさい。

[1] 以下の問いに答えなさい.

(1) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 4x + 4$ の解を求めなさい.

(2) 自然数 n が 4 の倍数でないならば, $f(n) = n^3 + 2n^2 + 3n + 2$ は 4 の倍数であることを示しなさい.

計算用余白

[2] a を $0 < a < 8$ を満たす定数とし、放物線 $P: y = ax^2 - ax + 2$ および双曲線 $H: y = \frac{4}{x} + 2a$ を考える。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) この放物線と双曲線は 1 点で交わるが、その交点の x 座標は a に依存しない。
その交点の座標を求めなさい。

(1) で求めた交点を N とし、 N における曲線 P の接線を ℓ 、 N における曲線 H の接線を m とする。

(2) ℓ と m が垂直に交わるときの a の値を求めなさい。

(3) 直線 ℓ 、 m および x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ で表すとき、 $S(a)$ を a の式で表し、 $S(a)$ の最小値を求めなさい。

計算用余白

[3] 原点 O の座標平面上に、双曲線 $H: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, (ただし, $x \geq 2$)がある.
 H 上の点 P を $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と極座標表示して, P と $OP \perp OQ$ を満たす
 点 Q を H 上に取れる場合を考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) Q が H 上に取れるための P の x 座標の取り得る値の範囲を求めなさい.

(2) x が (1) で求めた範囲にあるとき, $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$ は一定の値をとることを示し
 て, その値を求めなさい.

(3) x が (1) で求めた範囲にあるとき, PQ の最小値を求めなさい.

計算用余白

