

平成 11 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で 6 ページある。(落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。
別に解答用紙がある。
- 3 解答は、すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部, 学科により解答すべき問題 (○印), 解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受 験 者	解答すべき問題 (○印)						解答用紙 の枚数	解答時間
	①	②	③	④	⑤	⑥		
理学部数学科	○	○	○	○	○	○	6 枚	150 分
理学部物理学科及び工学部	○	○	○	○	○		5 枚	120 分
理学部化学科, 医学部及び歯学部	○	○	○	○			4 枚	90 分
理学部自然環境科学科	○	○	○				3 枚	75 分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

1 空間内に、平行四辺形 ABCD と点 P がある。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{c}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{DP}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。ただし、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ の内積を表す。

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

2 0 でない複素数 z に対して、 $w = z + \frac{2}{z}$ とおく。 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とし、 w の実部を x 、虚部を y とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) x, y をそれぞれ r と θ で表せ。
- (2) 複素数平面上で、 z が原点を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w が描く図形を図示せよ。
- (3) 複素数平面上で、 z が $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ と $\sqrt{3} + i$ を結ぶ線分上を動くとき、点 w が描く図形を図示せよ。

3 関数 $f(x) = x^2 \log x$ ($x > 0$) とする。ここで、対数は自然対数である。
 e を自然対数の底として、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_1^e f(x) dx$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線を l とする。このとき、
 $y = f(x)$ と l には接点以外に共有点がないことを示せ。

4 媒介変数 t を用いて

$$x = 1 - \cos t, \quad y = 1 + t \sin t + \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される座標平面上の曲線を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) y の最大値と最小値を求めよ。
- (2) 曲線 C , x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{である。}$$

- (1) $A^2 = O$ のとき、 A は逆行列をもたないことを示せ。
- (2) $A^2 = O$ のとき、 $E + A$ は $E - A$ の逆行列であることを示せ。
- (3) $A^3 = O$ のとき、 $E + A$ は $E - A$ の逆行列であることを示せ。

6 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。ここで、 e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、 $a_n = b_n e + c_n$ となる整数 b_n, c_n があることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ。