

1 2つの2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = px^2 + qx + r$ が $f(-1) = g(-1) = 0$, $f(2) = g(2) = 3$ をみたすとき、次の問いに答えよ。

(1) a , b を c で表せ。

(2) $c < r$ のとき, $-1 < x < 2$ をみたす x に対して $f(x) < g(x)$ が成り立つことを示せ。

2

平行四辺形 ABCD において、4 辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 E, F, G, H を、 $HF \parallel AB$, $EG \parallel BC$ となるようにとり、2 直線 EF と AC の交点を M、2 直線 HG と AC の交点を N とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = p\vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AH} = q\vec{b}$ とおくとき、 $\frac{1}{2} < p < 1$, $\frac{1}{2} < q < 1$ であるとして、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + s\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} + t\overrightarrow{HG}$ とするとき、 s , t を p と q で表せ。

(3) 2 点 M, N は一致することを示せ。

3 O を原点とする xy 平面上に、定点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ と 2 つの動点 P, Q がある。
点 Q は P を中心とする半径 1 の円周上を、点 $(3, 0)$ から出発して反時計回りに毎秒 2π の速さで等速回転している。さらに、点 P は O を中心とする半径 2 の円周上を、点 $(2, 0)$ から出発して反時計回りに、毎秒 π の速さで等速回転している。このとき次の問いに答えよ。

- (1) t 秒後の AQ の長さを $f(t)$ とするとき、 $f(t)$ を求めよ。
- (2) 動点 P が O のまわりを 1 回転するまでの間で、 $f(t)$ が最大、最小となる t とそのときの $f(t)$ の値を求めよ。
- (3) $f(t)$ が初めて最小となるまでに、動点 Q が動いた道のりを求めよ。

4 -1 と異なる複素数 z に対し、複素数 w を $w = \frac{z}{z+1}$ で定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) z が複素数平面の虚軸上を動くとき、 w が描く図形を求めよ。

(2) z が複素数平面上の円 $|z-1|=1$ の上を動くとき、 w が描く図形を求めよ。

5 2つの楕円 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$, $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) 4つの交点の座標を求めよ。
- (2) 2つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ。

6 n を自然数とすると、等式 $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n-2} + \frac{t^{2n}}{1-t^2}$ の両辺を、区間 $[0, x]$ ($0 < x < 1$) で積分すると、

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$$

となる。これについて、次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < 1$ のとき、

$$0 < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt < \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

となることを示せ。

(2) $0 < x < 1$ のとき、無限級数

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

の和を求めよ。