

1 放物線 $y = \frac{x^2}{2}$ 上の異なる 2 点 P, Q における接線が直交するとし, P の座標を $\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$ ($a > 0$) とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標, および, P と Q を結ぶ直線 l の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y = \frac{x^2}{2}$ と直線 l で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

2

$A^2 + A + E = O$ を満たす 2 次の正方行列 A について、次の問いに答えよ。

ただし、 E 、 O はそれぞれ単位行列、零行列とする。

(1) $\alpha A + \beta E = O$ を満たす実数 α 、 β が存在するならば、 $\alpha = \beta = 0$ となることを示せ。

(2) $(xA + yE)^3 = E$ を満たす実数 x, y の組をすべて求めよ。

3

2 次関数 $f(x) = x^2 + (k - 1)x + 3k - 2$ (k は実数) について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
- (2) $x = u + iv$ (u, v は実数) が 2 次方程式 $f(x) = 0$ の虚数解のとき、 u と v の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) k が 0 以上のすべての実数値をとるとき、2 次方程式 $f(x) = 0$ の解(実数解および虚数解)すべての集合を複素数平面上に図示せよ。

4 袋の中に赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている。3 個を同時に袋から取り出し、取り出された赤玉の個数を記録してから袋に戻す。この試行を n 回くり返したとき、記録された赤玉の個数の合計が奇数である確率を p_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n で表せ。

(3) p_n を求めよ。

5 次の問いに答えよ。ただし、数値はすべて10進数とする。

(1) 7^{12} の1の位を求めよ。

(2) n が自然数のとき、 117^n の1の位は1, 3, 7, 9のいずれかであることを証明せよ。

(3) 117^{2002} の1の位を求めよ。

6

座標平面上の2定点 $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(-\sqrt{2}, 0)$ に対し, 条件 $PA \cdot PB = 2$ を満たして動く点 $P(x, y)$ を考える。

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}, r > 0 \right)$$

とすると, 次の問いに答えよ。

- (1) $r^2 = 4 \cos 2\theta$ が成り立つことを示せ。
- (2) 三角形 PAB の面積の最大値を求めよ。また, このときの点 P の座標を求めよ。