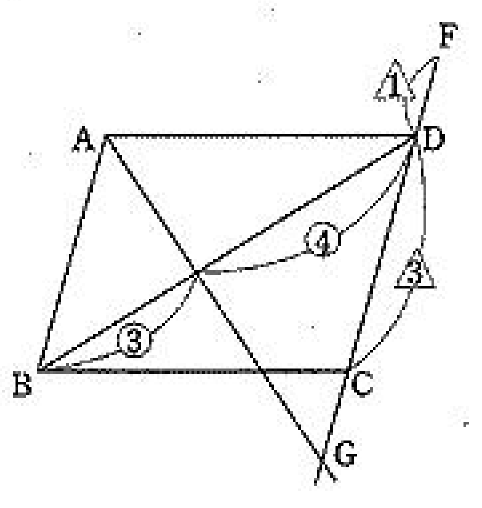
1



(1) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}}{3+4}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{d}}{7}$ …(答)

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$=\vec{d}+\dfrac{1}{3}\left(-\vec{b}\right)$

$=-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}$ …(答)

(2) $\triangle ABE \backsim \triangle GDE$ より

$AB:GD=BE:DE=3:4$

$\therefore\ \overrightarrow{DG}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{d}+\dfrac{4}{3}\vec{b}$ …(答)

(3) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{CD}$

$=\vec{d}+\dfrac{4}{3}\left(-\overrightarrow{AB}\right)=\vec{d}-\dfrac{4}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BF}$

$\therefore\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\vec{d}+\dfrac{4}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{d}-\dfrac{4}{3}\vec{b}\right)$

$=\left|\vec{d}\right|^2-\left|\dfrac{4}{3}\vec{b}\right|^2=0$

$\therefore\ \left|\vec{d}\right|=\dfrac{4}{3}\left|\vec{b}\right|$

$\therefore$ $AB:AD=\left|\vec{b}\right|:\left|\vec{d}\right|=3:4$ …(答)

2

(1) $z=(p-\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta)+\alpha$

$\therefore\ x+yi=\{1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{2})i-(1-\sqrt{2})i\}(\cos\theta+i\sin\theta)+1-\sqrt{2}i$

$=(\sqrt{3}-i)(\cos\theta+i\sin\theta)+1-\sqrt{2}i$

$=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta+1+i(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta-\sqrt{2})$

よって

$x=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta+1$

$y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta-\sqrt{2}$ …(答)

(2) $y=2\sin(\theta-30°)-\sqrt{2}$

$0°\leqq\theta<360°$ より $-30°\leqq\theta<330°$

$\therefore\ -1\leqq\sin(\theta-30°)\leqq 1$

$\therefore\ 2+\sqrt{2}\leqq y=2\sin(\theta-30°)-\sqrt{2}\leqq 2-\sqrt{2}$ …(答)

(3) z が実軸上 $y=0$

$\therefore\ \sin(\theta-30°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-30°\leqq\theta-30°<330°$ より,

$\theta-30°=0°,\ 180°$

$\therefore\ \theta=30°,\ 210°$

$\theta=30°$ のとき

$x=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}+1=3,\quad z=3$

$\theta=210°$ のとき

$x=\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}+1=-1,\quad z=-1$

(答) $\theta=30°,\ z=3$

又は

$\theta=210°,\ z=-1$

3

(1) $P(\alpha,\ \alpha^2)$ $Q(\beta,\ \beta^2)$ とおく $(\alpha\neq\beta)$

$y=x^2$ で $y'=2x$ より

P における接線の方程式は

$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2=2\alpha x-\alpha^2$

Q における接線の方程式は

$y=2\beta x-\beta^2$

R は $2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ より

$2(\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$\alpha\neq\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$y=2\alpha\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$

よって $R\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

ところで,

P, Q は l と $y=x^2$ の2交点

$l: y=tx+a$ なので,

$\alpha,\ \beta$ は $x^2-tx-a=0$ の2つの解

よって $\alpha+\beta=t,\ \alpha\beta=-a$

よって $R\left(\dfrac{t}{2},\ -a\right)$ …(答)

(2) $P(\alpha,\ \alpha^2)$, $Q(\beta,\ \beta^2)$, $R\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

$\overrightarrow{PQ}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$

$\overrightarrow{PR}=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2},\ \alpha(\beta-\alpha)\right)$

$\triangle PQR$ の面積は

$\dfrac{1}{2}PQ\cdot PR\sin\angle RPQ=\dfrac{1}{2}\sqrt{PQ^2\cdot PR^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$

より

$S=\dfrac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)\cdot\alpha(\beta-\alpha)-(\beta^2-\alpha^2)\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}\{2\alpha-(\beta+\alpha)\}\right|$

$=\dfrac{1}{4}|\beta-\alpha|^3=\dfrac{1}{4}\left\{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\right\}^3$

$=\dfrac{1}{4}(t^2+4a)^{\frac{3}{2}}$ …(答)

(3) $P(\alpha,\ \alpha^2)$, $Q(\beta,\ \beta^2)$, $R\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

G の座標は

$\left(\dfrac{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{3},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2+a}{3}\right)$ $(\because\ \alpha+\beta=t,\ \ \alpha\beta=-a)$

$x=\dfrac{t}{2}\qquad\therefore\ t=2x$

$y=\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{3}(2x)^2+\dfrac{a}{3}=\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{a}{3}$

t がすべての実数をとるので x もすべての実数をとる。

よって G の軌跡は放物線

$y=\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{a}{3}$ …(答)

4

(1) $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$ が

$x=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{17}{2}$ をとるから,

$a<0$ かつ $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{b^2}{4a}+c=\dfrac{13}{2}$

$\therefore\ a=-b,\quad -\dfrac{b}{2a}\cdot\dfrac{b}{2}+c=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b}{2}+c=\dfrac{13}{2}$

$\therefore\ c=\dfrac{13}{2}-\dfrac{b}{4}$

$\therefore\ f(x)=-bx^2+bx+\dfrac{13}{2}-\dfrac{b}{4}$

$\therefore\ b=\displaystyle\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(-bx^2+bx+\dfrac{13}{2}-\dfrac{b}{4}\right)dx$

$=\left[-\dfrac{b}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+\left(\dfrac{13}{2}-\dfrac{b}{4}\right)x\right]_{-1}^{2}$

$=-\dfrac{8}{3}b+2b+13-\dfrac{b}{2}-\dfrac{b}{3}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{13}{2}-\dfrac{b}{4}$

$=-\dfrac{9}{4}b+\dfrac{39}{2}$

$\therefore\ \dfrac{13}{4}b=\dfrac{39}{2}\qquad\therefore\ b=6$

$\therefore\ a=-6,\quad c=5$

$\therefore\ f(x)=-6x^2+6x+5$ …(答)

(2) $xf(x)+x=k$,

$y=xf(x)+x=-6x^3+6x^2+6x$

のグラフと $y=k$ のグラフの交点で考える。

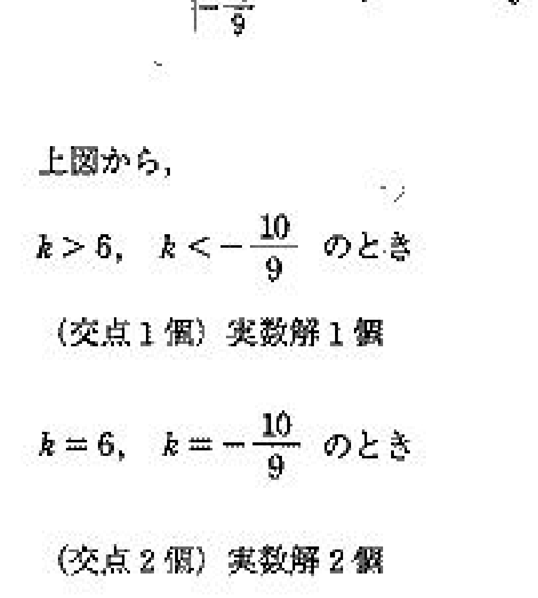
$g(x)=-6x^3+6x^2+6x$ とおくと

$g'(x)=-18x^2+12x+6$

$=-6(3x^2-2x-1)$

$=-6(3x+1)(x-1)$

x		$-\dfrac{1}{3}$		1	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$-\dfrac{10}{9}$	↗	6	↘



上図から,

$k>6,\ \ k<-\dfrac{10}{9}$ のとき

(交点1個) 実数解1個

$k=6,\ \ k=-\dfrac{10}{9}$ のとき

(交点2個) 実数解2個

$-\dfrac{10}{9}<k<6$ のとき

(交点3個) 実数解3個