

1 関数 $y = x^2$ のグラフ C と、定点 $A(0, a) (a > 0)$ を通り傾き t の直線 l との交点を P, Q とする。また、点 A を通り直線 l に垂直な直線 m と、曲線 C との交点を R, S とする。ここで、 t は正の実数とし、 P と R の x 座標は正、 Q と S の x 座標は負であるとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) PQ^2 と RS^2 を a と t を用いて表せ。

(2) $u = t^2 + \frac{1}{t^2}$ とおき、四角形 $PSQR$ の面積を T とするとき、 T^2 を u を用いて表せ。

(3) 直線 l の傾き t が正の実数全体を動くとき、面積 T の最小値を求めよ。

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とし、 E は 2 次の単位行列とする。また、 P と Q は 2 次の
正方行列で $A = 2P + 3Q$ 、 $P + Q = E$ をみたしているとする。このとき、次
の問いに答えよ。

- (1) P と Q を求めよ。
- (2) $P^2 = P$ 、 $Q^2 = Q$ を示し、 PQ と QP を求めよ。
- (3) A の逆行列を $aP + bQ$ と表したとき、実数 a と b を求めよ。
- (4) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。

3 1 辺の長さが r の正四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき、三角形 ABC の重心を G とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{BC}$ を示せ。

(3) 線分 OG を $3 : 1$ に内分する点を H とするとき、 $OH = HA$ を示し、この値を求めよ。

(4) $\angle OHA$ を θ とおくとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

4 関数 $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(\cos x + \sin x)$ に対して、 $f(x) = 0$ の正の解を小さい方から順に $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ の範囲で、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の和を求めよ。

5 点 P は数直線上を原点から出発して、投げたサイコロの目が $1, 2, 3$ または 4 なら正の向きに 2 進み、 5 または 6 なら負の向きに 1 進むとする。点 P の座標を x として、サイコロを n 回投げたとき、 $x = 15$ となる確率を p_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) n 回中、 5 または 6 の目が k 回出る確率を n と k を用いて表せ。ただし、 $k = 0, 1, \dots, n$ とする。

(2) p_9 と p_{10} を求めよ。

(3) $n \geq 9$ とするとき、 p_n を求めよ。

6 p と q は相異なる実数とし、整式 $P(x) = x^3 + px + q$ と $Q(x) = x^3 + qx + p$ は共通因数 $R(x)$ をもつとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $R(x)$ は 2 次式ではないことを示せ。
- (2) r を実数として、 $R(x) = x + r$ とするとき、 p と q の関係および r の値を求めよ。
- (3) $p = 0$ のときを考える。整式 $S(x)$ は $P(x)$ と $Q(x)$ で共に割り切れる整式のうち次数が最小で、最高次数の項の係数が 1 であるとする。このような $S(x)$ を求めよ。