1

(1)

関数 $y=-x^2+px+q$ を x で微分すると,

$$y'=-2x+p$$

となるので,放物線 C 上の点 $(1,1)$ での接線の傾きは $p-2$ である。これが直線 $y=-x+2$ の傾き,すなわち -1 に等しいことより,

$$p=1 \qquad \cdots ①$$

である。また,C が点 $(1,1)$ を通ることより,

$$-1+p+q=1$$

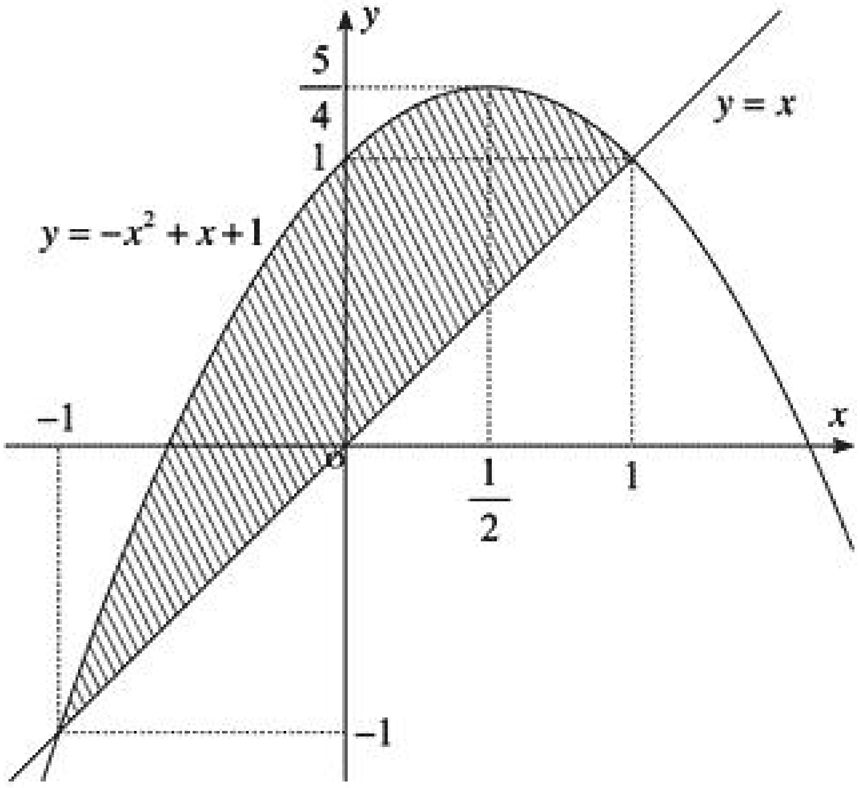
を得る。これと①より,

$$q=1$$

である。

(答) $p=q=1$

(2)



(1)より,$C: y=-x^2+x+1$ である。これと $y=x$ との交点の x 座標は,

$$x=-x^2+x+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=\pm 1$$

である。ゆえに求める面積 S は,

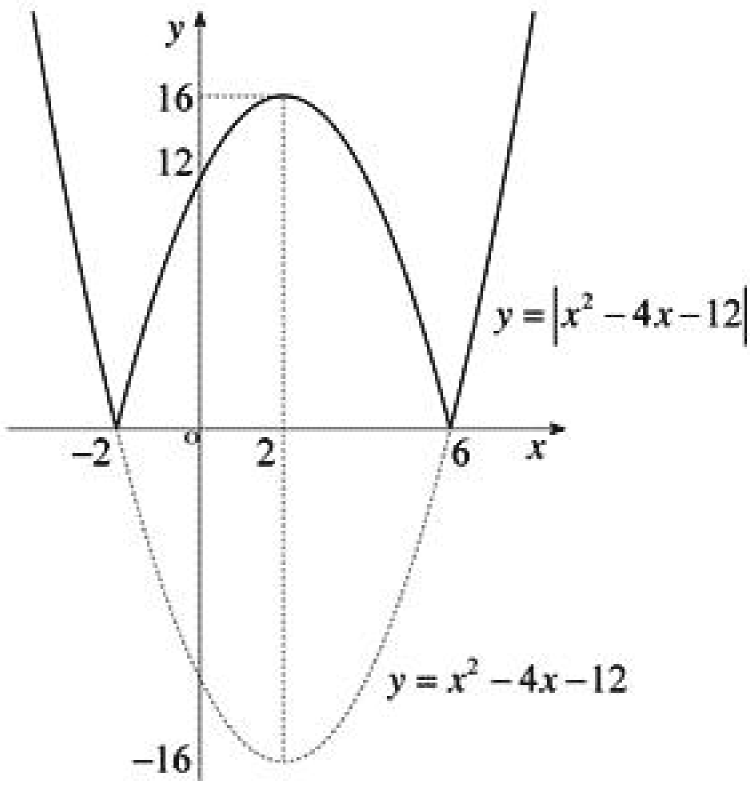
$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-x^2+x+1\right)-x\right\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x-1)(x+1)dx$$
$$=\frac{\left\{1-(-1)\right\}^3}{6}$$
$$=\frac{4}{3}$$

である。

(答) $\frac{4}{3}$

2

(1)



$$\begin{aligned} y &= |x^2-4x-12| \\ &= |(x-6)(x+2)| \end{aligned}$$

と変形できるので，グラフは前図のようになる。

(答) 前図

(2)

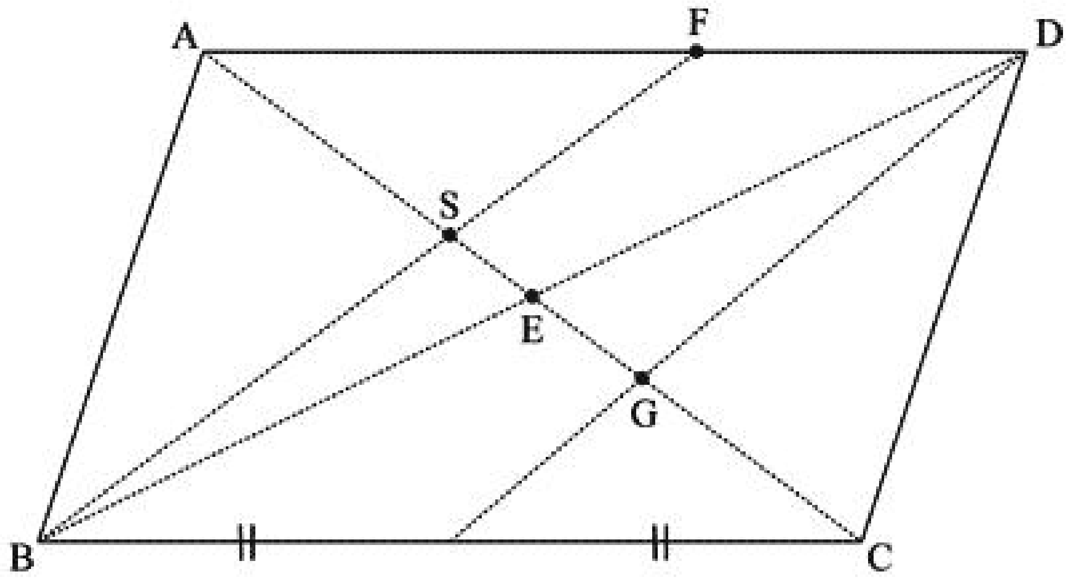
(1)のグラフより，直線 $y=a$ との共有点の個数は

$$\begin{cases} a>16 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ a=16 \text{ のとき} & 3\text{ 個} \\ 0<a<16 \text{ のとき} & 4\text{ 個} \\ a=0 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ a<0 \text{ のとき} & 0\text{ 個} \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} a>16 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ a=16 \text{ のとき} & 3\text{ 個} \\ 0<a<16 \text{ のとき} & 4\text{ 個} \\ a=0 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ a<0 \text{ のとき} & 0\text{ 個} \end{cases}$

3



(1)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$ である。点Gが三角形BCDの重心であることより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{d}\right)\\&=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$

(2)

平行四辺形においてある対角線の中点はもう一方の対角線の中点でもある。よって，点Eは線分AC上にある。ゆえに点Sも線分AC上にある。さらに，AD = BC，AF : FD = 3 : 2 であることからAF : BC = 3 : 5 である。よって，△AFS ∽ △CBS であるので AS : SC = AF : BC = 3 : 5 である。以上より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS}&=\frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{AS}\right|+\left|\overrightarrow{SC}\right|}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\\&=\frac{3}{3+5}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\\&=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AS}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$

(3)

(1), (2)より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SG}&=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AS}\\&=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)-\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\\&=\frac{7}{24}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\\&=\frac{7}{24}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

であるので，線分SGの長さ$\left|\overrightarrow{SG}\right|$は，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{SG}\right|&=\frac{7}{24}\left|\overrightarrow{AC}\right|\\&=\frac{7}{24}\cdot 36\\&=\frac{21}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $SG=\frac{21}{2}$

4

(1)

円の中心をOと置く。

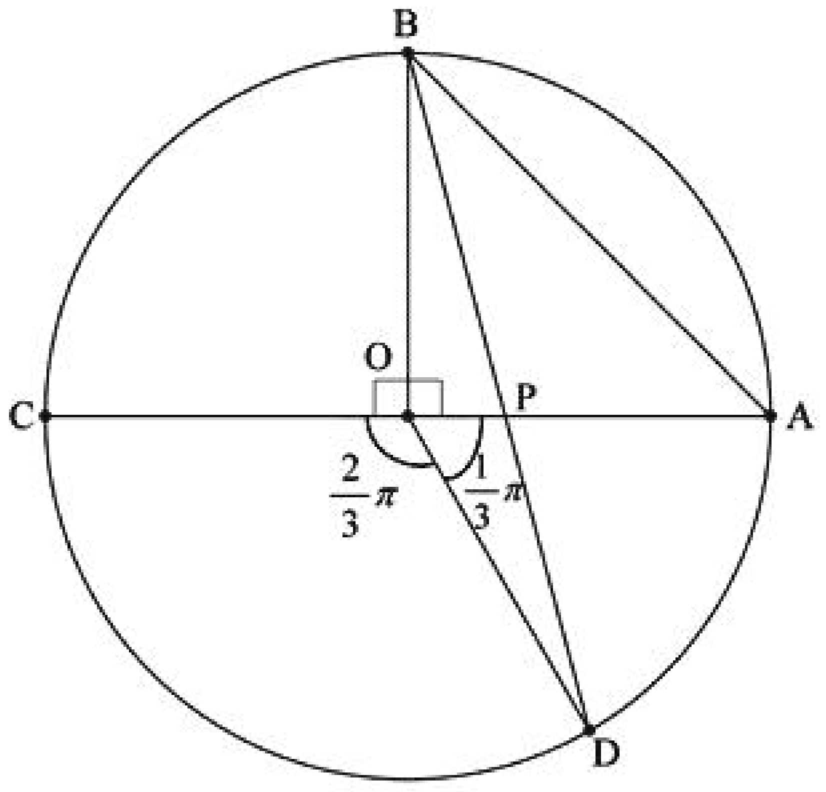
半径1の円では，弧長lに対する中心角θとの間に

$$l=\frac{\theta}{2\pi}\cdot 2\pi \Leftrightarrow \theta=l$$

の関係があるので，弧AB，弧BC，弧CD，弧DAに対する中心角はそれぞれ，

$$\angle AOB=\frac{1}{2}\pi,\ \angle BOC=\frac{1}{2}\pi,\ \angle COD=\frac{2}{3}\pi,\ \angle DOA=\frac{1}{3}\pi$$

である。よって，次図が描ける。



よって三角形AOBは$OA=OB=1$の直角二等辺三角形なので$AB=\sqrt{2}$である。

(答) $\sqrt{2}$

(2)

三角形BODにおいて$OB=OD$なので，

$$\angle OBD=\frac{1}{2}(\pi-\angle BOD)$$
$$=\frac{1}{12}\pi$$

である。よって，

$$\angle APB=\angle BOP+\angle OBD$$
$$=\frac{7}{12}\pi$$

である。

(答) $\frac{7}{12}\pi$

(3)

三角形BOPにおいて$\angle OBD=\frac{1}{12}\pi$であることより，

$$OP=\tan\frac{1}{12}\pi$$
$$=\tan\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\pi\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{1}{3}\pi-\tan\frac{1}{4}\pi}{1+\tan\frac{1}{3}\pi\tan\frac{1}{4}\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}$$
$$=2-\sqrt{3}$$

である。ゆえに

$$AP=AO-OP$$
$$=1-\left(2-\sqrt{3}\right)$$
$$=\sqrt{3}-1$$

である。

(答) $\sqrt{3}-1$

5

(1)

直線 $y=x$ に関する対称移動とは，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ にそれぞれ移動することと同値である。よって，

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

である。また，B は原点の周りの $-90°$ の回転移動を表す行列なので，

$$B=\begin{pmatrix}\cos(-90°)&\sin(-90°)\\-\sin(-90°)&\cos(-90°)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

である。

(答) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

(2)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であるので，$A^m=E$ を満たす最小の正の整数 k は 2 である。また

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$B^4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であるので，$B^n=E$ を満たす最小の正の整数 n は 4 である。

(答) $k=2$，$n=4$

(3)

$$ABA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=B^3$$

$$AB^2A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$=B^2$$

である。これと(2)の過程より，$ABA=B^k$，$AB^2A=B^l$ を満たす最小の正の整数 k，l は

$$k=3，l=2$$

である。

(答) $k=3$，$l=2$

(4)

$$\det A=0\cdot0-1\cdot1=-1\neq0$$

と，$A^2=E$ より，

$$A^{-1}=A$$

である。$ABA=B^3$，$AB^2A=B^2$ の両辺に左から A^{-1} をかけて，

$$BA=A^{-1}B^3$$
$$=AB^3$$
$$B^2A=A^{-1}B^2$$
$$=AB^2$$

を得る。また，$B^2A=AB^2$ の両辺に左から B をかけて，

$$B^3A=BAB^2$$
$$=AB^3B^2 \qquad (\because BA=AB^3)$$
$$=ABB^4$$
$$=AB \qquad (\because B^4=E)$$

を得る。

(答) $BA=AB^3$，$B^2A=AB^2$，$B^3A=AB$