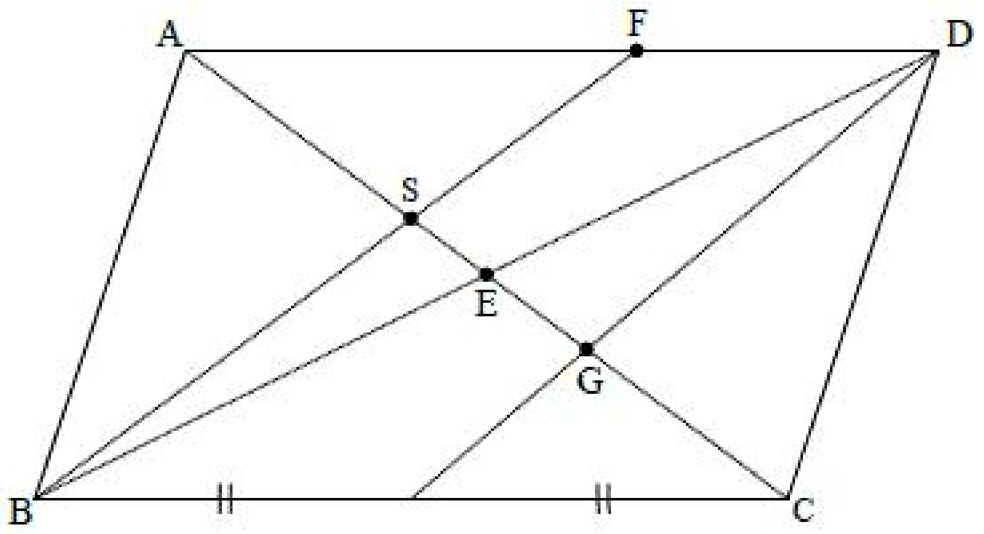
$\boxed{1}$




(1)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$ である。点 G が三角形 BCD の重心であることより,

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$

である。

(答) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$

(2)

平行四辺形においてある対角線の中点はもう一方の対角線の中点でもある。よって，点 E は線分 AC 上にある。ゆえに点 S も線分 AC 上にある。さらに，$AD=BC$，$AF:FD=3:2$ であることから $AF:BC=3:5$ である。よって，$\triangle AFS \backsim \triangle CBS$ であるので $AS:SC=AF:BC=3:5$ である。以上より，

$$\overrightarrow{AS}=\frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{\left|\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\overrightarrow{AS}\right|+\left|\overrightarrow{SC}\right|}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{3}{3+5}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$

である。

(答) $\overrightarrow{AS}=\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$

(3)

(1), (2)より,

$$\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AS}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)-\frac{3}{8}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{7}{24}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{7}{24}\overrightarrow{AC}$$

であるので，線分 SG の長さ $\left|\overrightarrow{SG}\right|$ は,

$$\left|\overrightarrow{SG}\right|=\frac{7}{24}\left|\overrightarrow{AC}\right|$$
$$=\frac{7}{24}\cdot 36$$
$$=\frac{21}{2}$$

である。

(答) $SG=\frac{21}{2}$

$\boxed{2}$

(1)

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 15^{15} &= 15\log_{10} 15 \\
&= 15\log_{10}\left(\log_{10} 3 + \log_{10} 5\right) \\
&= 15\left(\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2\right) \\
&= 15\left(0.4771 + 1 - 0.3010\right) \\
&= 17.6415
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
&17 < \log_{10} 15^{15} < 18 \\
&\Leftrightarrow 10^{17} < 15^{15} < 10^{18}
\end{aligned}
$$

なので，$15^{15}$ は 18 桁の整数である。

(答) 18 桁

(2)

$$100m > 106n \Leftrightarrow m > 1.06n \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

$8^m$ と $9^n$ の大小関係と，これらの $10(>1)$ を底とする対数の大小関係は変わらない。よって，$\log_{10} 8^m$ と $\log_{10} 9^n$ の大小関係を考えると，

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 8^m - \log_{10} 9^n &= m\log_{10} 8 - n\log_{10} 9 \\
&= 3m\log_{10} 2 - 2n\log_{10} 3 \\
&= 0.9030m - 0.9542n \\
&> 0.9030 \cdot 1.06n - 0.9542n \qquad (\because ①) \\
&= 0.95718n - 0.9542n \\
&= 0.00298n \\
&> 0 \qquad (\because n > 0)
\end{aligned}
$$

である。ゆえに①の条件下で $\log_{10} 8^m > \log_{10} 9^n$ が示された。よって，$8^m > 9^n$ であることが示された。

(証明終)

$\boxed{3}$

(1)

三角形OAPにおいて，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{AO}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}\\ &=1+t^2-2t\cos 60^\circ\\ &=t^2-t+1\end{aligned}$$

である。また，三角形OPMにおいて余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PM}^2 &= \mathrm{OM}^2+\mathrm{OP}^2-2\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}\\ &=\frac{1}{4}+t^2-2\cdot\frac{1}{2}t\cos 60^\circ\\ &=t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

(答)　$\mathrm{AP}^2=t^2-t+1$

$\mathrm{PM}^2=t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$

(2)

三角形OAMは$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，$\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$である。三角形AMPにおいて余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{AM}^2-\mathrm{PM}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AM}}\\ &=\frac{t^2-t+1+\frac{3}{4}-\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot\sqrt{t^2-t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &=\frac{3-t}{2\sqrt{3\left(t^2-t+1\right)}}\end{aligned}$$

である。

(答)　$\cos\theta=\frac{3-t}{2\sqrt{3\left(t^2-t+1\right)}}$

(3)

$0<\theta<\pi$なので，三角形AMPの面積を$S$として，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AM}\sin\theta\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &=\frac{\sqrt{3\left(t^2-t+1\right)}}{4}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3-t}{2\sqrt{3\left(t^2-t+1\right)}}\right)^2}\\ &=\frac{\sqrt{3\left(t^2-t+1\right)}}{4}\cdot\frac{\sqrt{4\left\{3\left(t^2-t+1\right)\right\}-(3-t)^2}}{2\sqrt{3\left(t^2-t+1\right)}}\\ &=\frac{1}{8}\sqrt{12t^2-12t+12-9+6t-t^2}\\ &=\frac{1}{8}\sqrt{11t^2-6t+3}\end{aligned}$$

である。

(答)　$\frac{1}{8}\sqrt{11t^2-6t+3}$

(4)

(3)の結果用いて，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{8}\sqrt{11\left(t-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{24}{11}}\\ &\geqq\frac{1}{8}\sqrt{\frac{24}{11}}\\ &=\frac{\sqrt{66}}{44}\end{aligned}$$

を得る。$0<t<1$であるから，これより三角形AMPの面積$S$の最小値は，

$t=\frac{3}{11}$のとき$S=\frac{\sqrt{66}}{44}$

である。

(答)　$\frac{\sqrt{66}}{44}$

## 4

(1)

$$f'(x)=\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{ax}{2}}-\frac{a}{2}ax^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{ax}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}a^2x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{ax}{2}}\left(x-\frac{1}{a}\right)$$

である。したがって，増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{a}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{\frac{a}{e}}$ | $\searrow$ | $(0)$ |

よって，

[1] $\frac{1}{a}>1$，すなわち$0<a<1$のとき

$f(x)$の最大値は$f(1)=ae^{-\frac{a}{2}}$，最小値は$f(0)=0$

[2] $0<\frac{1}{a}\leqq 1$，すなわち$1\leqq a$のとき

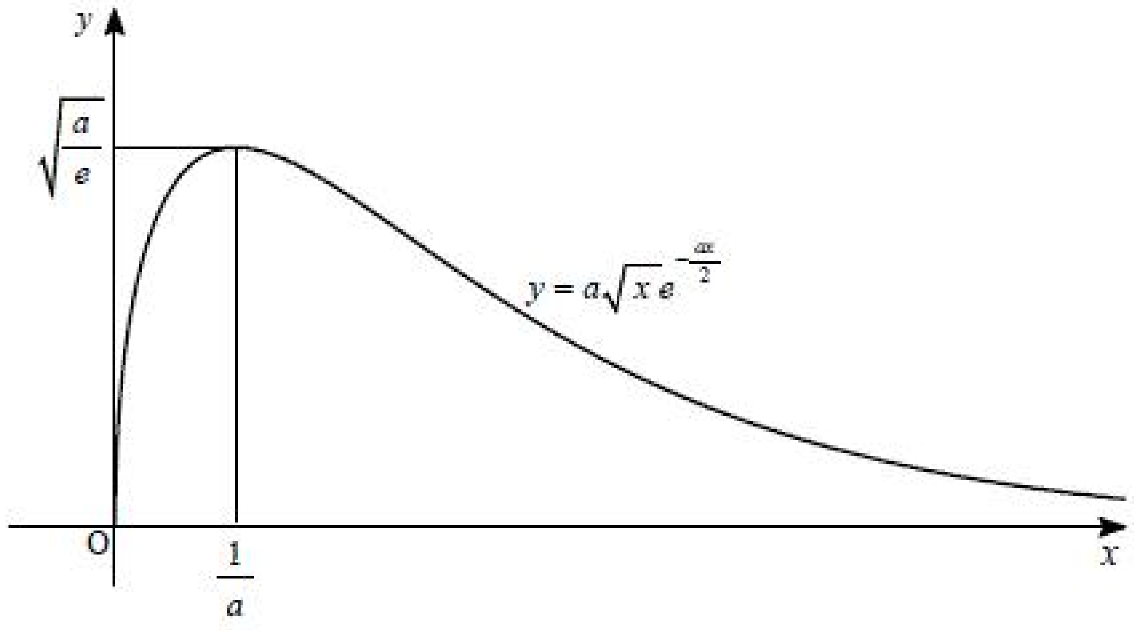
$f(x)$の最大値は$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{\frac{a}{e}}$，最小値は$f(0)=0$

である。

(答)　最大値:$ae^{-\frac{a}{2}}$　　最小値:0　　$(0<a<1)$

最大値:$\sqrt{\frac{a}{e}}$　　最小値:0　　$(1\leqq a)$

(2)




$$V(a)=\pi\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$
$$=\pi\int_0^1a^2xe^{-ax}dx$$
$$=\pi\left[-axe^{-ax}-e^{-ax}\right]_0^1$$
$$=\pi\left\{\left(-ae^{-a}-e^{-a}\right)-(0-1)\right\}$$
$$=\pi\left(1-ae^{-a}-e^{-a}\right)$$

である。

(答)　$V(a)=\pi\left(1-ae^{-a}-e^{-a}\right)$

(3)

$$\frac{dV}{da}=\pi\left(-e^{-a}+ae^{-a}+e^{-a}\right)$$
$$=\pi ae^{-a}$$

である。これは$a>0$で常に正であるので，$V(a)$は$a\geqq 0$で単調増加である。

よって，$0<a_1<a_2$のとき，$V(a_1)<V(a_2)$である。

(証明終)

## 5

(1)

直線 $y=x$ に関する対称移動とは，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ にそれぞれ移動することと同値である。よって，

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

である。また，$B$ は原点の周りの $-90°$ の回転移動を表す行列なので，

$$B=\begin{pmatrix}\cos(-90°)&\sin(-90°)\\-\sin(-90°)&\cos(-90°)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

である。

(答) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

(2)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であるので，$A^m=E$ を満たす最小の正の整数 $k$ は 2 である。また

$$B^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$B^4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であるので，$B^n=E$ を満たす最小の正の整数 $n$ は 4 である。

(答) $k=2$，$n=4$

(3)

$$ABA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=B^3$$

$$AB^2A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$=B^2$$

である。これと(2)の過程より，$ABA=B^k$，$AB^2A=B^l$ を満たす最小の正の整数 $k$，$l$ は

$k=3$，$l=2$

である。

(答) $k=3$，$l=2$

(4)

$$\det A=0\cdot 0-1\cdot 1=-1\neq 0$$

と，$A^2=E$ より，

$$A^{-1}=A$$

である。$ABA=B^3$，$AB^2A=B^2$ の両辺に左から $A^{-1}$ をかけて，

$$BA=A^{-1}B^3$$
$$=AB^3$$
$$B^2A=A^{-1}B^2$$
$$=AB^2$$

を得る。また，$B^2A=AB^2$ の両辺に左から $B$ をかけて，

$$B^3A=BAB^2$$
$$=AB^3B^2 \qquad (\because BA=AB^3)$$
$$=ABB^4$$
$$=AB \qquad (\because B^4=E)$$

を得る。

(答) $BA=AB^3$，$B^2A=AB^2$，$B^3A=AB$