

(1)

導関数は

$$f'(x) = 4x - 2(a+1)$$

であるから、求める接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = 2(a-1)x - 2a^2 - 2a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2(a-1)x - 2a^2 - 2a$$

(2)

(1)で求めた接線の式に $x=2$, $y=-4$ を代入すると、

$$-4 = 4(a-1) - 2a^2 - 2a \Leftrightarrow a^2 - a = 0$$

となる。 $-1 < a < 1$ であるから、 $a=0$ である。

$$(\text{答}) \quad a = 0$$

(3)

 $a=0$ のとき、 $f(x) = 2x^2 - 2x$ となる。したがって、 $y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は $x=0, 1$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 -(2x^2 - 2x) dx &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3}$$

(1)

線分 OA, OB の長さの和は

$$OA + OB = \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

と表せる。

ここで, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから, $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 1 をとる。

したがって, $OA + OB$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

(2)

三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

と表せる。

ここで, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから, $\sin 2\theta$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 1 をとる。

したがって, 三角形 OAB の面積は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$

(1)

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} = x\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{AP} = (1-x)\vec{a} + y\vec{b}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{DP} = x\vec{a} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{PQ} = (1-x)\vec{a} + y\vec{b}$$

(2)

対称性より、 $\angle DPQ = \angle DCQ = 90^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (x\vec{a} - \vec{b}) \cdot \{(1-x)\vec{a} + y\vec{b}\} \\ &= x(1-x)|\vec{a}|^2 - y|\vec{b}|^2 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \\ &= x(1-x) - yt^2 = 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

である。

また、対称性より $DP = DC = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DP}|^2 &= (x\vec{a} - \vec{b})^2 \\ &= x^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \\ &= x^2 + t^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{1-t^2} \quad (\because x > 0)$$

である。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{x(1-x)}{t^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-t^2} - 1 + t^2}{t^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \sqrt{1-t^2}, \quad y = \frac{\sqrt{1-t^2} - 1 + t^2}{t^2}$$

(3)

$x = \frac{3}{5}$ のとき、

$$t = \sqrt{1-x^2} = \frac{4}{5}$$

である。このとき、

$$y = \frac{x(1-x)}{t^2} = \frac{\frac{3}{5}\left(1-\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{8}$$

となる。

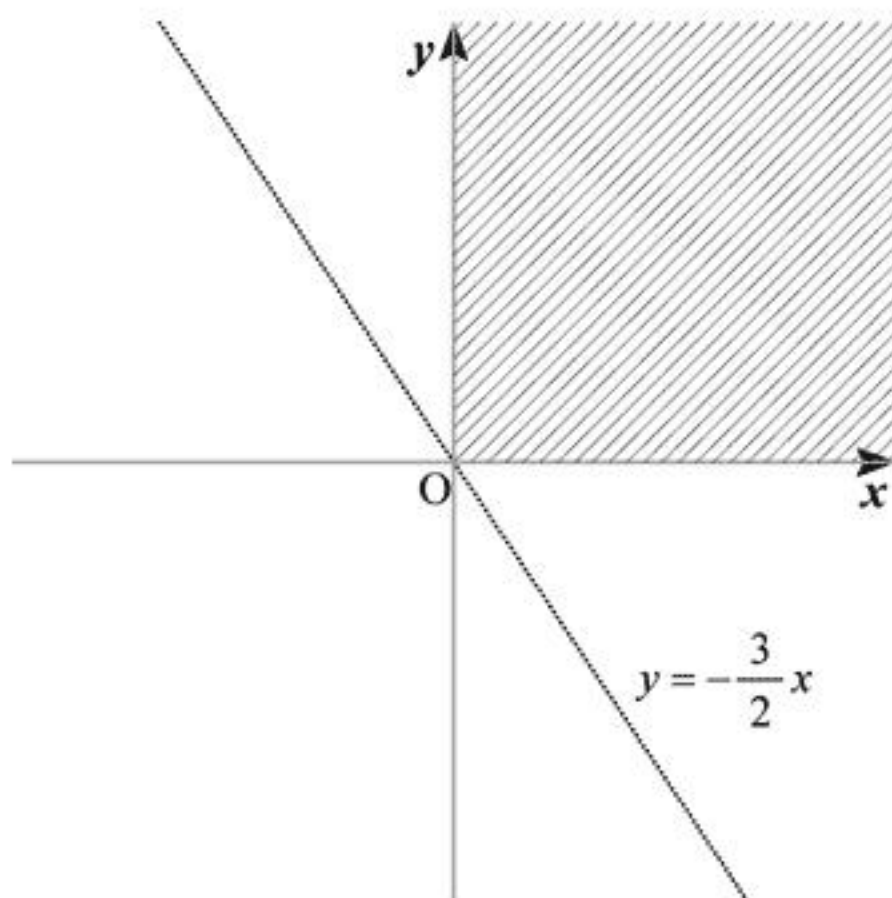
$$(\text{答}) \quad t = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{3}{8}$$

(1)

 $xy > 0$ より $(x > 0 \text{ かつ } y > 0)$ または $(x < 0 \text{ かつ } y < 0)$

である。さらに、 $3x + 2y > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{3}{2}x$ を満たせばよいので、求める領域を図示すると

次図斜線部のようになる。ただし境界は含まない。



(答)

(2)

真数条件より、

$$xy > 0 \text{ かつ } 3x + 2y > 0$$

である。これは、(1)より $x > 0$ かつ $y > 0$ を表すことが分かる。

このとき、与えられた不等式は

$$\log_2 \frac{(3x+2y)^2}{xy} > \log_2 2^5$$

のように変形できる。真数を比較して

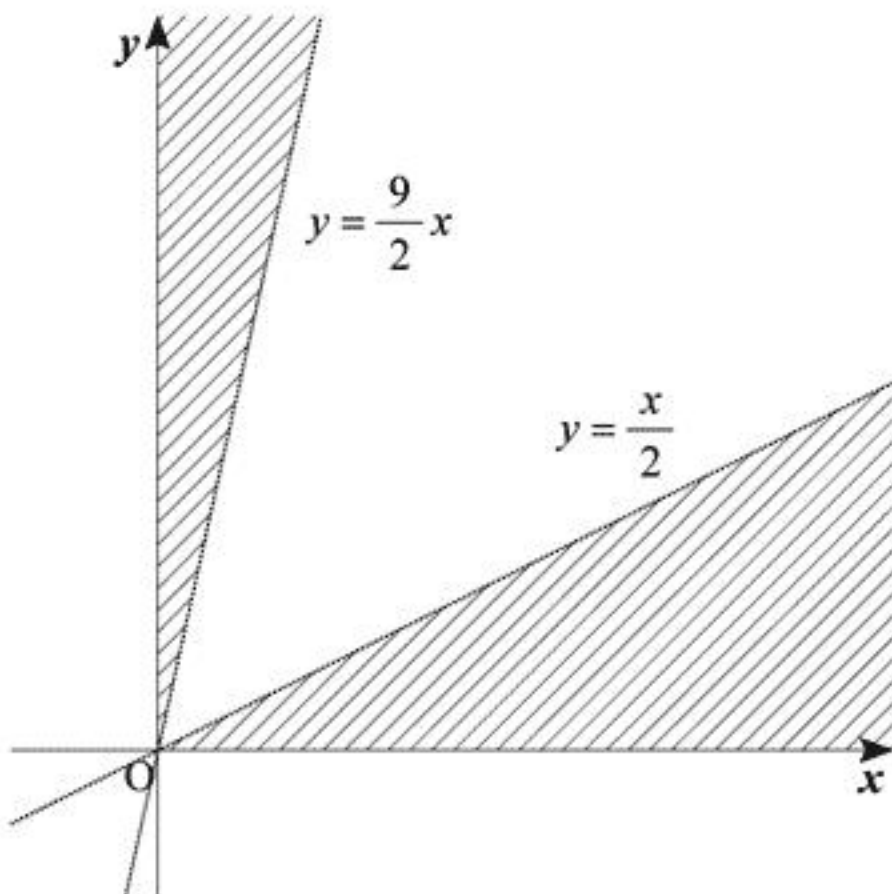
$$\frac{(3x+2y)^2}{xy} > 32 \Leftrightarrow (x-2y)(9x-2y) > 0$$

となる。これを解くと

$$\left(y < \frac{x}{2} \text{ かつ } y < \frac{9}{2}x \right) \text{ または } \left(y > \frac{x}{2} \text{ かつ } y > \frac{9}{2}x \right)$$

となる。 $x > 0$ かつ $y > 0$ に注意して、求める領域を図示すると、次図斜線部のようになる。

ただし境界は含まない。



(答)