

(1)

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} = x\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{AP} = (1-x)\vec{a} + y\vec{b}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{DP} = x\vec{a} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{PQ} = (1-x)\vec{a} + y\vec{b}$$

(2)

対称性より, $\angle DPQ = \angle DCQ = 90^\circ$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (x\vec{a} - \vec{b}) \cdot \{(1-x)\vec{a} + y\vec{b}\} \\ &= x(1-x)|\vec{a}|^2 - y|\vec{b}|^2 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \\ &= x(1-x) - yt^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。

また, 対称性より $DP = DC = 1$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DP}|^2 &= (x\vec{a} - \vec{b})^2 \\ &= x^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \\ &= x^2 + t^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{1-t^2} \quad (\because x > 0)$$

である。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{x(1-x)}{t^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-t^2} - 1 + t^2}{t^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = \sqrt{1-t^2}, \quad y = \frac{\sqrt{1-t^2} - 1 + t^2}{t^2}$$

(3)

$x = \frac{3}{5}$ のとき,

$$t = \sqrt{1-x^2} = \frac{4}{5}$$

である。このとき,

$$y = \frac{x(1-x)}{t^2} = \frac{\frac{3}{5}\left(1-\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{3}{8}$$

(1)

計算すると,

$$\begin{aligned}(A-tE)\{A-(1-t)E\} &= (A-tE)A-(1-t)(A-tE)E \\ &= A^2-tA-(1-t)A+(1-t)tE \\ &= (t-t^2)E \quad (\because A^2=A)\end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}\{A-(1-t)E\}(A-tE) &= A^2-tA-(1-t)A+(1-t)tE \\ &= (t-t^2)E \quad (\because A^2=A)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (A-tE)\{A-(1-t)E\}=(t-t^2)E, \quad \{A-(1-t)E\}(A-tE)=(t-t^2)E$$

(2)

行列 A が逆行列をもつと仮定し, これを A^{-1} とおく。

これを $A^2=A$ の両辺に右からかけると,

$$A^2A^{-1}=AA^{-1} \Leftrightarrow A=E$$

となる。これは $A \neq E$ に矛盾するので, 行列 A は逆行列をもたない。

同様に, 行列 $A-E$ が逆行列をもつと仮定し, これを $(A-E)^{-1}$ とおく。

$A^2=A$ であるから

$$A^2-A=O \Leftrightarrow A(A-E)=O$$

となる。この両辺に右から $(A-E)^{-1}$ をかけると $A=O$ となる。

これは $A \neq O$ に矛盾するので, 行列 $A-E$ は逆行列をもたない。

(証明終)

(3)

$t=0, 1$ のとき, (2) より $A-tE$ は逆行列をもたない。

$t \neq 0, 1$ のとき, (1) より

$$(A-tE) \cdot \frac{A-(1-t)E}{t-t^2} = \frac{A-(1-t)E}{t-t^2} \cdot (A-tE) = E$$

が成り立つので, $A-tE$ は逆行列をもち

$$(A-tE)^{-1} = \frac{A-(1-t)E}{t-t^2} = \frac{1}{t-t^2} A - \frac{1}{t} E$$

となる。

したがって, 求める必要十分条件は $t \neq 0, 1$ であり, このとき

$$(A-tE)^{-1} = \frac{1}{t-t^2} A - \frac{1}{t} E$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{必要十分条件は } t \neq 0, 1, \text{ このとき } (A-tE)^{-1} = \frac{1}{t-t^2} A - \frac{1}{t} E$$

(1)

2式から y を消去して整理すると,

$$\begin{aligned}\frac{1+c}{c}x^2 + (1+c)(1-x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (1+c)^2 x^2 - 2c(1+c)x + c^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。この方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = c^2(1+c)^2 - c^2(1+c)^2 = 0$$

となる。したがって、楕円 E_c は直線 $x+y=1$ に接する。

(証明終)

また、①の解は $x = \frac{c}{1+c}$ であるから、接点の座標は $\left(\frac{c}{1+c}, \frac{1}{1+c}\right)$ である。

(答) 接点の座標 $\left(\frac{c}{1+c}, \frac{1}{1+c}\right)$

(2)

2式から y を消去して整理すると

$$\begin{aligned}ax^2 + b(1-x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+b)x^2 - 2bx + b-1 &= 0\end{aligned}$$

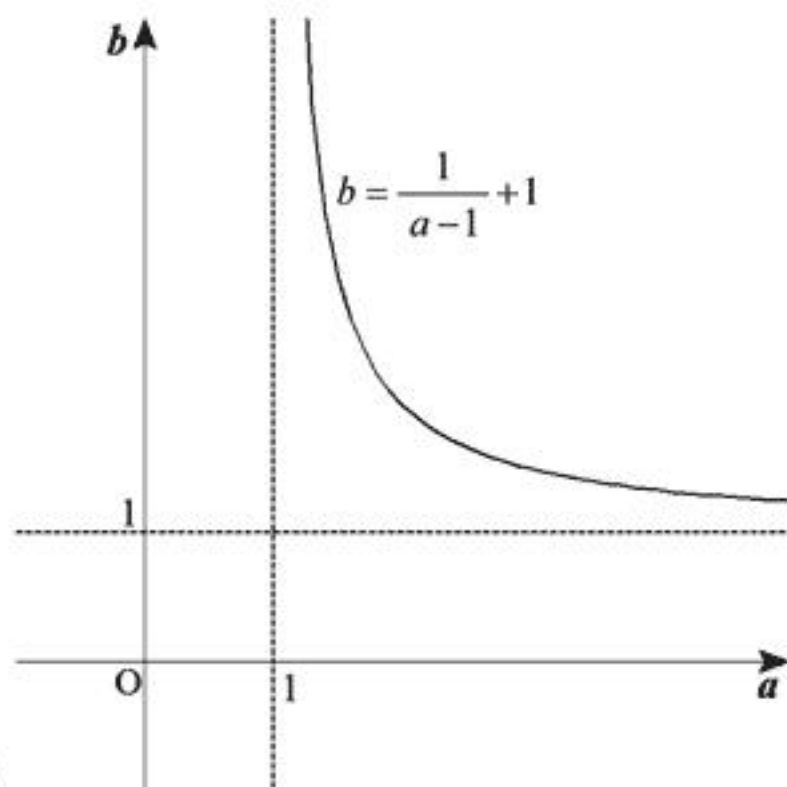
となる。この方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = b^2 - (a+b)(b-1) = a+b-ab$$

となる。ここで、楕円と直線が接するとき $D=0$ となるので、求める a と b の関係式は

$$a+b-ab=0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{a-1} + 1$$

である。 a と b が正の実数であることに注意すると、グラフは次図のようになる。



(答)

ここで、 $\frac{1}{a-1} = c$ とおくと、 $a = \frac{1+c}{c}$, $b = 1+c$ と表せるので、 $ax^2 + by^2 = 1$ は楕円 E_c の形に表せることが示された。

(証明終)

(1)

放物線 $y = -ax^2 + b$ と x 軸との交点の x 座標は $x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$ である。

したがって、求める面積は

$$S = \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (-ax^2 + b) dx = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (-ax^2 + b) dx = 2 \left[-\frac{a}{3}x^3 + bx \right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{4b}{3} \sqrt{\frac{b}{a}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{4b}{3} \sqrt{\frac{b}{a}}$$

(2)

$x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) が、 $y \leq -ax^2 + b$ を満たせばよい。

$$y \leq -ax^2 + b$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \leq -a \cos^2 \theta + b$$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 \theta - \sin \theta - a + b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \left(t - \frac{1}{2a} \right)^2 + b - \frac{1+4a^2}{4a} \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形できる。ここで、 $t = \sin \theta$ とおいた。

$-1 \leq t \leq 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つ条件を求めればよい。

$a > \frac{1}{2}$ のとき、 $0 < \frac{1}{2a} < 1$ であることを考慮すると、求める条件は

$$b - \frac{1+4a^2}{4a} \geq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{1+4a^2}{4a}$$

である。

(証明終)

(3)

$b \geq \frac{1+4a^2}{4a}$ のとき、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4b}{3} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &\geq \frac{4}{3} \cdot \frac{1+4a^2}{4a} \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1+4a^2}{4a}} \quad \dots \textcircled{2} \\ &= \frac{1+4a^2}{6a^2} \sqrt{1+4a^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $g(a) = \frac{1+4a^2}{6a^2} \sqrt{1+4a^2} = \frac{(1+4a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$ とおくと、導関数は

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{(6a^2)^2} \left\{ \frac{3}{2} (1+4a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 8a \cdot 6a^2 - (1+4a^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 12a \right\} \\ &= \frac{1}{3a^4} (6a^3 - a - 4a^3) (1+4a^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3a^3} (2a^2 - 1) (1+4a^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a > \frac{1}{2}$ における $g(a)$ の増減表は

a	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

となる。よって、 $g(a)$ が最小となるのは $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときで、最小値は $\sqrt{3}$ である。

さらに、 $\textcircled{2}$ 式において等号が成り立つのは、 $b = \frac{1+4a^2}{4a}$ のときであるから、

S が最小となるのは $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ のときであり、このとき $S = \sqrt{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{3}{4}\sqrt{2} \text{ のとき, } S = \sqrt{3}$$

(1)

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \log x + x^{n-1}$$

である。 $\lim_{x \rightarrow +0} x^k \log x = 0$ (k は自然数) を用いると,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'_n(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (nx^{n-1} \log x + x^{n-1}) = 0$$

となる。

(証明終)

(2)

$$f'_n(x) = x^{n-1} (n \log x + 1)$$

$$f''_n(x) = x^{n-2} \{n(n-1) \log x + (2n-1)\}$$

である。よって、 $x > 0$ に注意して

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} (n \log x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = -\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$f''_n(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-2} \{n(n-1) \log x + (2n-1)\} = 0$$

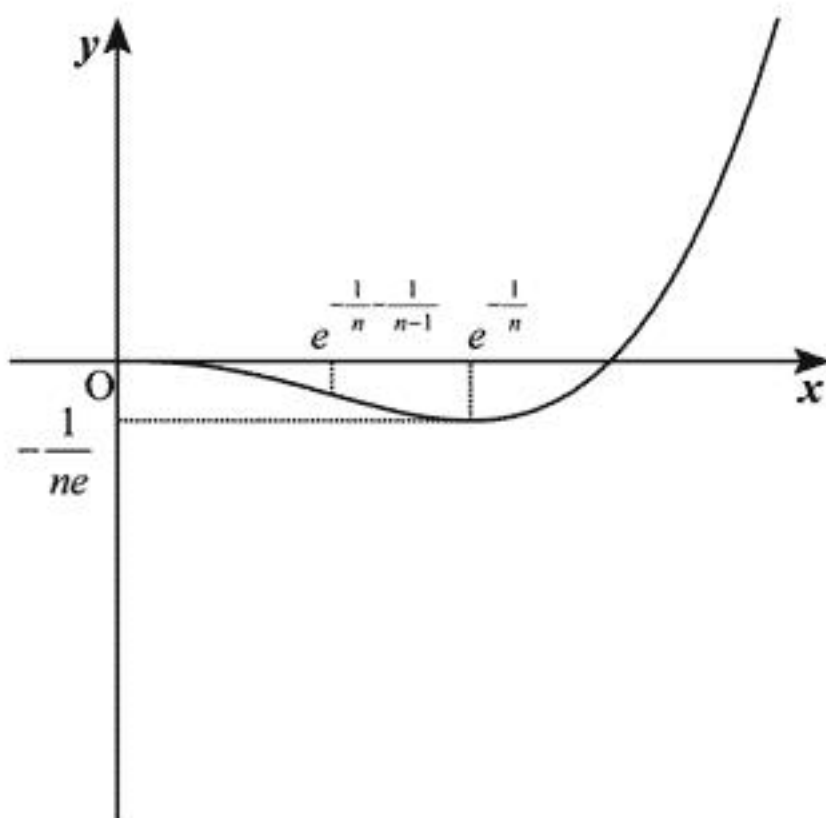
$$\Leftrightarrow \log x = -\frac{2n-1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}$$

となるから、増減表は次のようになる。

x	0	...	$e^{-\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}$	...	$e^{-\frac{1}{n}}$	...
$f'_n(x)$		-	-	-	0	+
$f''_n(x)$		-	0	+	+	+
$f_n(x)$		↘		↘	$-\frac{1}{ne}$	↗

よって、グラフは次図のようになる。



(答)

(3)

$$\begin{aligned} \int f_n(x) dx &= \int x^n \log x dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \int \frac{1}{n+1} x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left(\log x - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{e^{-\frac{1}{n}}}^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ \frac{1}{n+1} \left(0 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+1} e^{-\frac{n+1}{n}} \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2n+1}{n(n+1)^2} e^{-\frac{n+1}{n}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{2 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} e^{-1 - \frac{1}{n}} \right\} \\ &= -1 + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{e^{-\frac{1}{n}}}^1 f_n(x) dx = -1 + \frac{2}{e}$$