

平成 20 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は, 試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は, 全部で 5 ページある。(落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。)別解答用紙がある。
- 3 解答はすべて, 問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は, 各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部, 学科により解答すべき問題(○印), 解答用紙の枚数及び解答時間は, 下表のとおりである。

受 験 者	解答すべき問題(○印)					解答用紙 の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(数学科, 物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部(化学科, 生物学科, 自然環境科学科), 医学部及び歯学部	○	○	○	○		4 枚	90 分

- 6 下書きは, 問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は, 持ち帰ること。

1 長方形 ABCD に対して、それぞれの辺の長さを

$$AB = CD = 1, \quad BC = DA = t, \quad 0 < t < 1$$

とする。辺 AB 上の点 P および辺 BC 上の点 Q を、点 C と点 P が 2 点 D, Q を通る直線に関して対称になるようにとる。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AP} = x\vec{a} \quad (0 < x < 1), \quad \overrightarrow{BQ} = y\vec{b} \quad (0 < y < 1)$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, x , y で表せ。

(2) x , y を t で表せ。

(3) $x = \frac{3}{5}$ のとき、 t および y を求めよ。

2 A は $A \neq E$, $A \neq O$ かつ $A^2 = A$ をみたす 2 次正方行列とする。ただし,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 実数 t に対して, 積 $(A - tE) \{A - (1 - t)E\}$ および $\{A - (1 - t)E\} (A - tE)$ を求めよ。
- (2) 行列 A および $A - E$ はともに逆行列をもたないことを示せ。
- (3) $A - tE$ が逆行列をもつための t に対する必要十分条件を求めよ。また, t がその必要十分条件をみたすとき, 逆行列 $(A - tE)^{-1}$ を求めよ。

3 定数 $c > 0$ に対して，楕円

$$\frac{1+c}{c}x^2 + (1+c)y^2 = 1$$

を E_c で表す。このとき，次の問いに答えよ。

- (1) 楕円 E_c は直線 $x + y = 1$ に接することを示し，接点の座標を求めよ。
- (2) 正の実数 a, b に対して，楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ が直線 $x + y = 1$ に接するとき， a と b の関係式を求め， ab 平面にそのグラフをかけ。またこのとき，楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ は楕円 E_c の形に表せることを示せ。

4 座標平面上で、不等式 $y \leq -ax^2 + b$ の表す領域を A とし、不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を B とする。ただし、 $a > \frac{1}{2}$ かつ $b > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = -ax^2 + b$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を a, b で表せ。
- (2) B が A に含まれるための必要十分条件は、 $b \geq \frac{1+4a^2}{4a}$ であることを示せ。
- (3) B が A に含まれるとき、(1)で求めた面積 S が最小となる a, b およびそのときの S を求めよ。

5 n を $n \geq 2$ である自然数とする。関数

$$f_n(x) = x^n \log x, \quad x > 0$$

について、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。必要ならば、 x を右側から 0 に近づけたときの極限值について

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^k \log x = 0$$

がすべての自然数 $k \geq 1$ に対して成り立つことを利用してもよい。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} f'_n(x) = 0$ を示せ。

(2) 関数 $y = f_n(x)$ の増減、グラフの凹凸を調べ、グラフをかけ。

(3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{e^{-\frac{1}{n}}}^1 f_n(x) dx$$

を求めよ。