

(1)

$$\begin{cases} 2^a = x-5 \\ 2^b = x-6 \end{cases}$$

$2^a > 0, 2^b > 0$ より, $x > 6$ としてよい。それぞれについて, 底が 2 の対数をとると

$$\begin{cases} a = \log_2(x-5) \\ b = \log_2(x-6) \end{cases}$$

2 式の辺々を足し合わせて

$$a+b = \log_2(x-5)(x-6)$$

(答) $\log_2(x-5)(x-6)$

(2)

与不等式を変形して

$$f(x) < \log_4 36$$

$$\log_2(x-5)(x-6) < \frac{1}{2}\log_2 36$$

$$\log_2(x^2 - 11x + 30) < \log_2 6$$

ここで底は $2(>1)$ であるので

$$x^2 - 11x + 30 < 6$$

$$x^2 - 11x + 24 < 0$$

$$(x-3)(x-8) < 0$$

これと真数条件 $x > 6$ より, 求める答は

$$6 < x < 8$$

(答) $6 < x < 8$

(1)

点 A と点 P の距離は

$$AP = \sqrt{x^2 + \{f(x) - 2\}^2}$$

 $AP = f(x)$ (≥ 0) の両辺を 2 乗して整理すると,

$$x^2 + \{f(x) - 2\}^2 = \{f(x)\}^2$$

$$x^2 + \{f(x)\}^2 - 4f(x) + 4 = \{f(x)\}^2$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

任意の x に対して $\frac{1}{4}x^2 + 1 \geq 0$ が成り立つので, この答は妥当である。

$$(\text{答}) \quad y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

(2)

$$f'(x) = \frac{1}{2}x$$

より, Q における接線の方程式は

$$y - \left(\frac{1}{4}a^2 + 1 \right) = \frac{1}{2}a(x - a)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2 + 1$$

これが原点を通るので, $x = y = 0$ を代入して

$$0 = -\frac{1}{4}a^2 + 1$$

$$a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$(\text{答}) \quad a = 2$$

(3)

Q の座標は (2) より (2, 2) である。よって直線 AQ の方程式は $y = 2$ である。

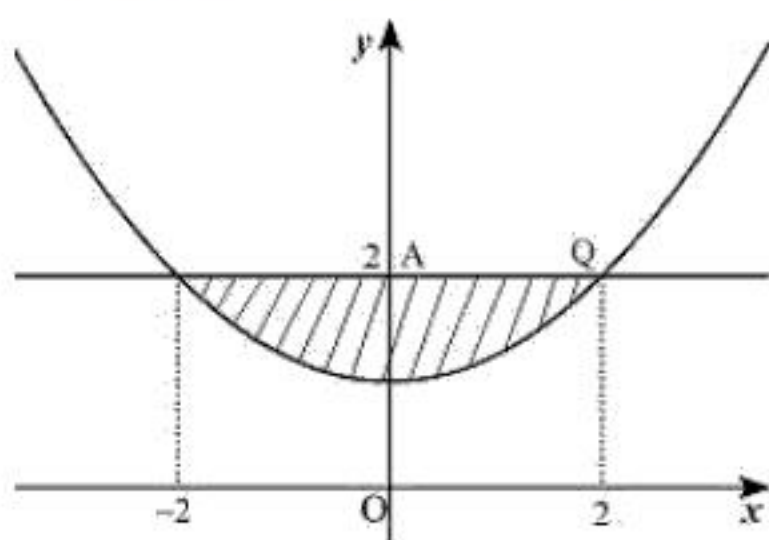
求めるのは, 図斜線部の面積なので,

$$\int_{-2}^2 \left\{ 2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) \right\} dx$$

$$= 2 \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{12}x^3 + x \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}$$



$$(\text{答}) \quad \frac{8}{3}$$

(1)

数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ は初項 6, 公差 2 の等差数列であるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= 6 + 2(n-1) \\ &= 2n + 4\end{aligned}$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{2n+4}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2n+4}$$

(2)

$$a_2 = \frac{1}{2 \times 2 + 4} = \frac{1}{8} \quad \text{より,}$$

$$b_1 = 8 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 8a_{k+1}a_{k+2} \\ &= \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{8}{(2k+6)(2k+8)} \\ &= \frac{1}{6} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) \\ &= \frac{1}{6} + 2 \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{6} + 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{n+3}\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{n+3}$$

(1)

$$\tan C = \frac{4}{3} > 0 \quad \text{より, } 0 < C < \frac{\pi}{2} \quad \text{であるので}$$

$$\cos^2 C = \frac{1}{1 + \tan^2 C} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \cos C = \frac{3}{5}$$

$$\sin C = \cos C \tan C = \frac{4}{5}$$

$$(\text{答}) \quad \sin C = \frac{4}{5}, \cos C = \frac{3}{5}$$

(2)

余弦定理より

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cos C$$

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - \frac{6}{5}(n+1)(n+2)$$

$$n^2 - 12n - 13 = 0$$

$$(n-13)(n+1) = 0$$

$$\therefore n = 13 \quad (\because n > 0)$$

$$(\text{答}) \quad n = 13$$

(3)

 $\triangle ABC$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5}$$

$$= 84$$

内接円の半径を r とすると, 再び $\triangle ABC$ の面積を考えて

$$S = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) r$$

$$\therefore r = \frac{2S}{AB + BC + CA}$$

$$= \frac{2 \times 84}{13 + 14 + 15}$$

$$= 4$$

$$(\text{答}) \quad \text{面積 } 84, \text{ 半径 } 4$$