

(1)

$y = xe^{-x}$ と $y = ax$ の交点の x 座標 p は次式を満たす。

$$pe^{-p} = ap$$

$$p(e^{-p} - a) = 0$$

$$e^{-p} = a \quad (\because p > 0)$$

$$\therefore p = -\log a$$

このような p が存在する条件は、

$$-\log a > 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

(答) $0 < a < 1$

(2)

$y = xe^{-x}$ において

$$y' = e^{-x} + x(-e^{-x})$$

$$= (1-x)e^{-x}$$

(1)より $p = -\log a$ であるから

$$h(a) = (1 + \log a)e^{\log a}$$

$$= a(1 + \log a)$$

また、

$$h'(a) = \log a + 1$$

よって、 $0 < a < 1$ の範囲で次の増減表をえる。

a	0	...	e^{-2}	...	1
$h'(a)$		-	0	+	
$h(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって、 $h(a)$ は $a = e^{-2}$ で最小値

$$h(e^{-2}) = e^{-2}(1 + \log e^{-2}) = -e^{-2}$$

をとる。

(答) $a = e^{-2}$ のとき、最小値 $-e^{-2}$

(3)

$a = e^{-2}$ のとき、 $p = -\log a = 2$ である。

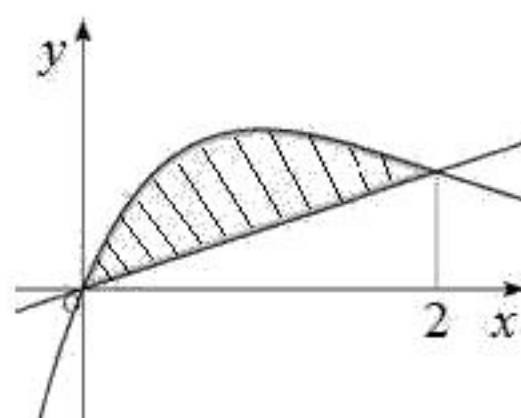
求めるのは次図斜線部の面積なので、それを S とおくと、

$$S = \int_0^2 (xe^{-x} - e^{-2}x) dx$$

$$= \left[-xe^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x}) dx - \left[\frac{1}{2}e^{-2}x^2 \right]_0^2$$

$$= -5e^{-2} + 1$$

(答) $-5e^{-2} + 1$



(1)

$$P^{-1} = \frac{1}{5 \times 1 - 1 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$AB=BA$ に、左から P^{-1} を、右から P をかけて、

$$P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$$

$$\therefore (P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}BP) = (P^{-1}BP) \cdot (P^{-1}AP)$$

が成立する。(1)の答を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4a \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2a \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = 0$$

また、

$$B = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad a = 0, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$$

(3)

$$(P^{-1}AP + P^{-1}BP)^n = \{P^{-1}(A+B)P\}^n = P^{-1}(A+B)^n P$$

が成り立つ。よって

$$(A+B)^n = P(P^{-1}AP + P^{-1}BP)^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 6^{n-1} & -5 \cdot 3^{n-1} + 10 \cdot 6^{n-1} \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 6^{n-1} & -2 \cdot 3^{n-1} + 10 \cdot 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad (A+B)^n = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 6^{n-1} & -5 \cdot 3^{n-1} + 10 \cdot 6^{n-1} \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 6^{n-1} & -2 \cdot 3^{n-1} + 10 \cdot 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

(1)

数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = \cos \frac{\theta}{2}$$

なので、成立している。

[2] ある自然数 k に対して $a_k = \cos \frac{\theta}{2^k}$ が成立していると仮定する。

漸化式より、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{\frac{1+a_k}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\theta}{2^k}}{2}} = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^{k+1}}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2^{k+1}} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2^{k+1}} < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

ゆえに $n=k+1$ のときも成立する。

以上 [1], [2] より、任意の自然数 n について成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$2 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \cos \frac{\theta}{2} = \sin \theta$$

なので、成立している。

[2] ある自然数 k に対して $2^k \times \sin \frac{\theta}{2^k} \times \cos \frac{\theta}{2} \times \cos \frac{\theta}{2^2} \times \cos \frac{\theta}{2^3} \times \cdots \times \cos \frac{\theta}{2^k} = \sin \theta \cdots \textcircled{1}$

が成立していると仮定する。

$\sin \frac{\theta}{2^k} = 2 \times \sin \frac{\theta}{2^{k+1}} \times \cos \frac{\theta}{2^{k+1}}$ を①に代入して、

$$\begin{aligned} 2^k \times \left(2 \times \sin \frac{\theta}{2^{k+1}} \times \cos \frac{\theta}{2^{k+1}} \right) \times \cos \frac{\theta}{2} \times \cos \frac{\theta}{2^2} \times \cos \frac{\theta}{2^3} \times \cdots \times \cos \frac{\theta}{2^k} &= \sin \theta \\ \therefore 2^{k+1} \times \sin \frac{\theta}{2^{k+1}} \times \cos \frac{\theta}{2} \times \cos \frac{\theta}{2^2} \times \cos \frac{\theta}{2^3} \times \cdots \times \cos \frac{\theta}{2^{k+1}} &= \sin \theta \end{aligned}$$

ゆえに $n=k+1$ のときも成立する。

以上 [1], [2] より、任意の自然数 n について成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(1), (2) より、 $2^n \times \sin \frac{\theta}{2^n} \times b_n = \sin \theta$ が成立する。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \times \sin \frac{\theta}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} \times \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \right)^{-1} \right\} = \frac{\sin \theta}{\theta} \quad \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = 1 \right)$$

(答) $\frac{\sin \theta}{\theta}$

(1)

[1] $x=1, 2$ のとき x が最大となるような並べ方はないので、

$$p_x = 0$$

[2] $x \geq 3$ のとき

左から 3 番目までのカードの並べ方は

$${}_nP_3 = n(n-1)(n-2) \text{ 通り}$$

このうち得点が x となるのは左から 1 番目のカードの数字が x であり、左から 2, 3 番目のカードの数字が x より小さい場合であるので、そのような並べ方は

$$1 \cdot {}_{x-1}P_2 = (x-1)(x-2) \text{ 通り}$$

よって、その確率は

$$p_x = \frac{(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)} \quad (\text{これは } x=1, 2 \text{ のときも成り立つ})$$

$$(\text{答}) \quad p_x = \frac{(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

(2)

(1) の結果より

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - \sum_{x=1}^n \frac{(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{x=1}^n (x^2 - 3x + 2) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}$$

(3)

(1) の結果より、求める期待値を E とおくと

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^n k p_k \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 2k) \\ &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 - 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= \frac{n+1}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{n+1}{4}$$

(1)

条件より円の方程式は

$$x^2 + (y-a)^2 = b^2 + \left(a - \frac{1}{b}\right)^2$$

とおける。よって、 $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ における円の接線の方程式は

$$bx + \left(\frac{1}{b} - a\right)(y-a) = b^2 + \left(a - \frac{1}{b}\right)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。また $y = \frac{1}{x}$ について、 $y' = -\frac{1}{x^2}$ であるから $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ における $y = \frac{1}{x}$ の接線の方程式は

$$y - \frac{1}{b} = -\frac{1}{b^2}(x-b) \quad \cdots \textcircled{2}$$

円と曲線は点 B で接しているので、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ は一致する。そこで傾きを比較すると

$$b : \frac{1}{b} - a = \frac{1}{b^2} : 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{b} - b^3$$

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{b} - b^3$$

(2)

 $M(X, Y)$ とおくと

$$X = \frac{b}{2}, Y = \frac{a + \frac{1}{b}}{2}$$

である。(1)の結果を用いると、

$$a = \frac{1}{2X} - 8X^3, b = 2X$$

なので、これらを Y の式に代入すると

$$Y = \frac{1}{2X} - 4X^3$$

また $b = 2X > 0$ より $X > 0$ である。ゆえに求める軌跡は

$$y = \frac{1}{2x} - 4x^3 \quad (x > 0)$$

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{2x} - 4x^3 \quad (x > 0)$$