

平成 21 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で 5 ページある。(落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。)

別に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部、学科により解答すべき問題(○印)、解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受 験 者	解答すべき問題(○印)					解答用紙 の枚数	解答時間
	①	②	③	④	⑤		
理学部(数学科, 物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部(化学科, 生物学科, 自然環境科学科), 医学部及び歯学部	○	○	○	○		4 枚	90 分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

1 a を定数, e を自然対数の底とする。曲線 $C: y = xe^{-x}$ と直線 $l: y = ax$ は, $x \geq 0$ の範囲で, 原点 O 以外の点 $P(p, pe^{-p})$ で交わる。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点 P における接線の傾きを $h(a)$ とするとき, $h(a)$ が最小となる a の値と, そのときの $h(a)$ の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた a の値について, $0 \leq x \leq p$ の範囲で, 曲線 C と直線 OP とで囲まれた図形の面積を求めよ。

2 a は実数で，行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ， $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

B は 2 次の正方行列で， $AB = BA$ ， $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ を満たしている。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} と行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) a の値と，行列 B を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，行列 $(A + B)^n$ を求めよ。

3 $-\pi < \theta < \pi$ とするとき、次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a_n = \cos \frac{\theta}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。

(2) $2^n \times \sin \frac{\theta}{2^n} \times \cos \frac{\theta}{2} \times \cos \frac{\theta}{2^2} \times \cos \frac{\theta}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\theta}{2^n} = \sin \theta$
($n = 1, 2, 3, \dots$)

が成り立つことを証明せよ。

(3) $b_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

$\theta \neq 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を θ を用いて表せ。

4 n を 3 以上の整数とし、1 から n までのすべて異なる整数が 1 つずつ書いてある n 枚のカードをよく切って横 1 列に並べ、左から 1 番目のカードに書いてある数字を x とする。

左から 3 番目までのカードに書いてある数字の中で x が最大するとき、 x が得点として与えられ、それ以外の場合の得点は 0 である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 得点が x である確率を p_x とするとき、 p_x を n と x を用いて表せ。
- (2) 得点が 0 である確率を p_0 とするとき、 p_0 の値を求めよ。
- (3) 得点の期待値を n を用いて表せ。

5 点 $A(0, a)$ を中心とする円と、曲線 $y = \frac{1}{x} \ (x > 0)$ は 1 点 $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ のみを共有する。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a を b を用いて表せ。

(2) 点 A が y 軸上を動くとき、線分 AB の中点 M の軌跡を求めよ。