

(1)

真数条件より、

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$$

であるから、 x の範囲は

$$0 < x < 4$$

・・・①

である。

$$4\log_4 x \leq \log_2(4-x)+1$$

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \leq \log_2(4-x)+\log_2 2$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x \leq \log_2(8-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 8-2x$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

・・・②

①、②より、求める不等式の解は

$$0 < x \leq 2$$

答 $0 < x \leq 2$

(2)

$$t = 3^x$$

とおく。 x が、(1)で求めた x の範囲を動くとき、 t の範囲は

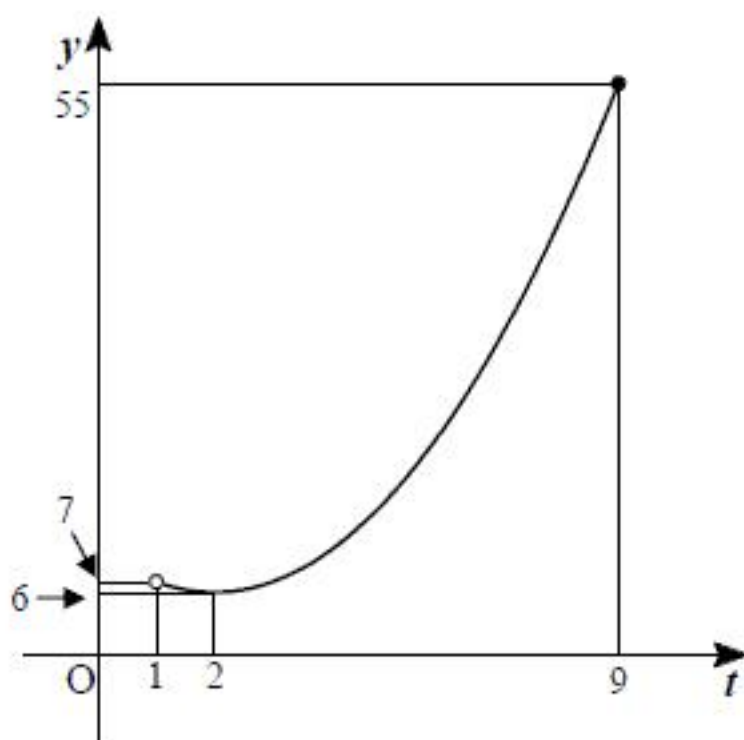
$$1 < t \leq 9$$

となる。与式は

$$y = 9^x - 4 \cdot 3^x + 10$$

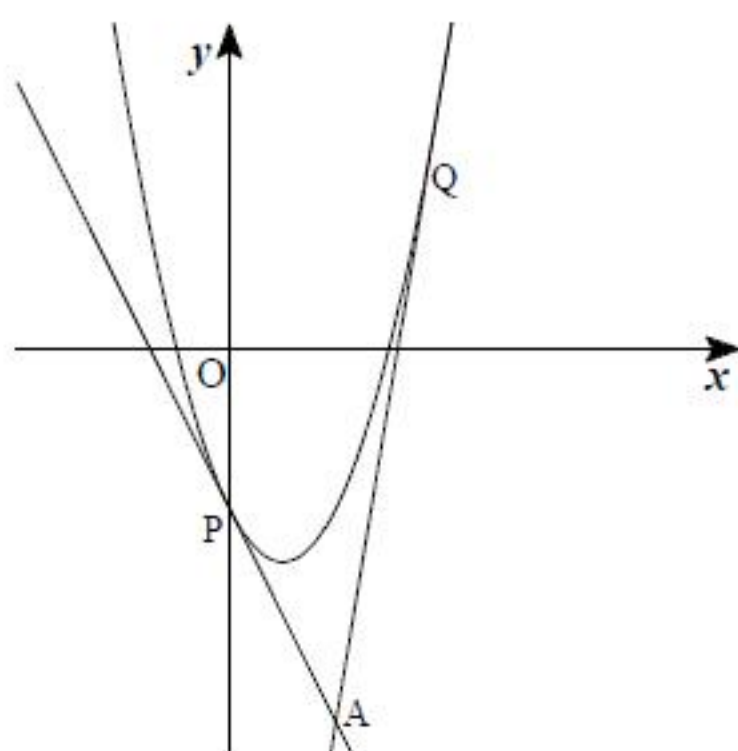
$$= t^2 - 4t + 10$$

$$= (t-2)^2 + 6$$

と変形でき、 $y = (t-2)^2 + 6$ ($1 < t \leq 9$) のグラフは次図のようになる (白丸は除く)。よって y は、 $t=9 \Leftrightarrow x=2$ のとき最大値55をとり、 $t=2 \Leftrightarrow x=\log_3 2$ のとき最小値6をとる。

答 $\begin{cases} \text{最大値} & 55 & (x=2 \text{ のとき}) \\ \text{最小値} & 6 & (x=\log_3 2 \text{ のとき}) \end{cases}$

(1)



点P, Qの x 座標がそれぞれ p, q であるから, それぞれの座標は次のようになる。

$$\text{点P } (p, p^2 - 2p - 3) \quad \text{点Q } (q, q^2 - 2q - 3)$$

次に,

$$f(x) = (x+1)(x-3)$$

とおく。これを x について微分すると,

$$f'(x) = 2(x-1)$$

となる。よって, 点P, Qにおける接線の方程式は, それぞれ次のようになる。

$$\text{点P : } y = 2(p-1)(x-p) + (p^2 - 2p - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 2(p-1)x - p^2 - 3 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{点Q : } y = 2(q-1)(x-q) + (q^2 - 2q - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 2(q-1)x - q^2 - 3 \quad \dots\dots ②$$

①と②を連立して解くと,

$$2(p-1)x - p^2 - 3 = 2(q-1)x - q^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{p+q}{2}$$

よって, 点Aの座標は,

$$\left(\frac{p+q}{2}, pq - p - q - 3 \right) \quad \dots\dots ③$$

となる。また, 2点P, Qを通る直線の傾きが2であるから,

$$\frac{(q^2 - 2q - 3) - (p^2 - 2p - 3)}{q - p} = 2$$

が成り立つ。これを解くと,

$$p + q - 2 = 2$$

$$\therefore p + q = 4 \quad \dots\dots ④$$

④を③に代入すると, 点Aの座標は,

$$(2, pq - 7)$$

となる。これが

$$(a, -7)$$

であるから,

$$\begin{cases} a = 2 \\ pq = 0 \end{cases} \quad \dots\dots ⑤$$

$$\dots\dots ⑥$$

④, ⑥および $p < q$ という条件より,

$$p = 0, q = 4$$

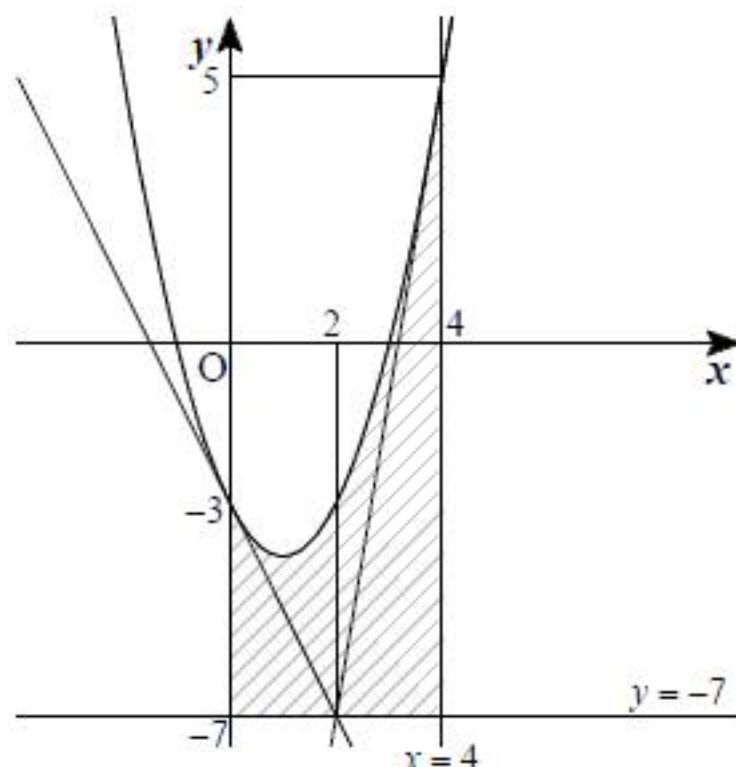
となる。よって, 点Pと点Qの座標は

$$\text{点P } (0, -3) \quad \text{点Q } (4, 5)$$

となる。

$$\text{答 } a = 2 \quad \text{点P } (0, -3) \quad \text{点Q } (4, 5)$$

(2)



求めるのは図斜線部の面積であるから,

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \{(x^2 - 2x - 3) - (-7)\} dx \\ &= \int_0^4 (x^2 - 2x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_0^4 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

(1)

自然数1の個数は1以上3以下、自然数2の個数は2以上4以下、自然数3の個数は3以上5以下である。よって、数列 $\{p_n\}$ の初めの5項となり得るものは

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{cases} (1, 2, 2, 3, 3), (1, 2, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2) \\ (1, 1, 2, 2, 3), (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 2, 2) \end{cases}$$

である。

$$\text{答 } (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{cases} (1, 2, 2, 3, 3), (1, 2, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2) \\ (1, 1, 2, 2, 3), (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 2, 2) \end{cases}$$

(2)

数列 $\{a_n\}$ には自然数 k が k 個現れる。

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} i\right) + 1 = \frac{1}{2}(k-1)k + 1$$

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}k(k+1)$$

であるから、第 $\frac{1}{2}(k-1)k+1$ 項から第 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 項までが自然数 k である。

よって、 a_{210} の値が自然数 k であるとする、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}(k-1)k+1 \leq 210 \leq \frac{1}{2}k(k+1)$$

この不等式を満たす k は

$$k = 20$$

である。よって

$$a_{210} = 20$$

である。

答 $a_{210} = 20$

(3)

数列 $\{p_n\}$ の中に小さな自然数ができるだけ多く現れた時に、 $\sum_{i=1}^{50} p_i$ の値が最小となる。

そのような数列 $\{p_n\}$ の初めの50項は

1が3個、2が4個、3が5個、4が6個、5が7個、6が8個、7が9個、8が8個

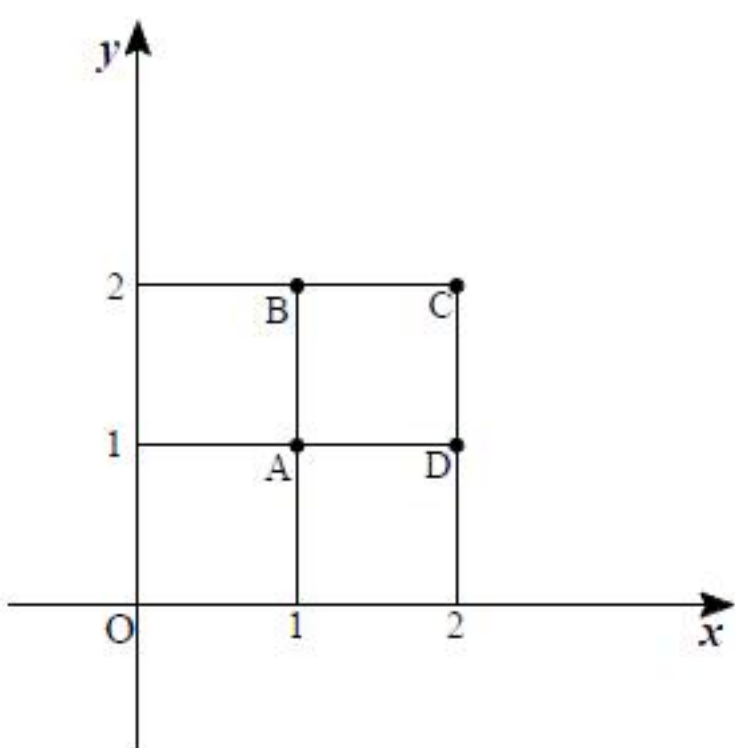
並んだものである。このときの $\sum_{i=1}^{50} p_i$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50} p_i &= 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 + 7 \times 9 + 8 \times 8 \\ &= 260 \end{aligned}$$

である。

答 260

(1)



1回の試行でA～Dに止まる確率は、それぞれ

$$A:\frac{1}{6}, B:\frac{1}{3}, C:\frac{1}{3}, D:\frac{1}{6}$$

である。O, P, Qが同一直線上にあるようなP, Qの組み合わせは次の6通りである。

$$(P, Q)=(A, A), (A, C), (B, B), (C, A), (C, C), (D, D)$$

よって、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{18}$$

となる。

答 $\frac{7}{18}$

(2)

O, P, Qを通る2次関数 $y=f(x)$ のグラフがただ一通りに定まるようなP, Qの組み合わせは次の6通りである。

$$(P, Q)=(A, D), (D, A), (B, C), (C, B), (B, D), (D, B)$$

$y=f(x)$ のグラフがOを通るので、

$$f(x)=ax^2+bx$$

とおくことができる。(ただし、 $a \neq 0$)

(i) $(P, Q)=(A, D), (D, A)$ のとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+2b=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2} \\ \therefore &y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

(ii) $(P, Q)=(B, C), (C, B)$ のとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &a=-1, b=3 \\ \therefore &y=-x^2+3x \end{aligned}$$

(iii) $(P, Q)=(B, D), (D, B)$ のとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2} \\ \therefore &y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x \end{aligned}$$

$$\text{答} \quad \begin{cases} (P, Q)=(A, D), (D, A) \text{のとき} & y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x \\ (P, Q)=(B, C), (C, B) \text{のとき} & y=-x^2+3x \\ (P, Q)=(B, D), (D, B) \text{のとき} & y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x \end{cases}$$

(3)

(1)より $X=1$ となる確率は $\frac{7}{18}$

(2)より $X=2$ となる確率は、

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{7}{18}$$

よって、求める期待値は

$$\frac{7}{18} \times 1 + \frac{7}{18} \times 2 = \frac{7}{6}$$

となる。

答 $\frac{7}{6}$