

(1)

$AB = \sqrt{6}$ なので,

$$|\overline{AB}|^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 6 \quad (\because |\vec{a}| = |\vec{b}| = 3)$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

(2)

点 P は辺 AB を $x:1-x$ に内分する点、点 Q は辺 OC を $y:1-y$ に内分する点なので,

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

$$= y\vec{c} - \{(1-x)\vec{a} + x\vec{b}\}$$

$$= (x-1)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}$$

$$(\text{答}) \quad \overline{PQ} = (x-1)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}$$

(3)

$\triangle OAB \equiv \triangle OBC \equiv \triangle OCA$ なので, (1)の答を用いると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 6$$

である。よって, (2)より,

$$|\overline{PQ}|^2 = (x-1)^2 |\vec{a}|^2 + x^2 |\vec{b}|^2 + y^2 |\vec{c}|^2 - 2x(x-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - 2xy\vec{b} \cdot \vec{c} + 2(x-1)y\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$= \{(x-1)^2 + x^2 + y^2\} \cdot 3^2 + 2\{-x(x-1) - xy + (x-1)y\} \cdot 6$$

$$= 6x^2 - 6x + 9y^2 - 12y + 9$$

$$= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

よって, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$ のとき, PQ は最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3} \text{ のとき, PQ の最小値 } \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(1)

自然数1の個数は1以上3以下, 自然数2の個数は2以上4以下, 自然数3の個数は3以上5以下である。よって, 数列 $\{p_n\}$ の初めの5項となり得るものは

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{cases} (1, 2, 2, 3, 3), (1, 2, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2) \\ (1, 1, 2, 2, 3), (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 2, 2) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{cases} (1, 2, 2, 3, 3), (1, 2, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2) \\ (1, 1, 2, 2, 3), (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 2, 2) \end{cases}$$

(2)

数列 $\{a_n\}$ には自然数 k が k 個現れる。

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} i\right) + 1 = \frac{1}{2}(k-1)k + 1$$

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}k(k+1)$$

であるから, 第 $\frac{1}{2}(k-1)k+1$ 項から第 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 項までが自然数 k である。

よって, a_{210} の値が自然数 k であるとする, 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}(k-1)k+1 \leq 210 \leq \frac{1}{2}k(k+1)$$

この不等式を満たす k は

$$k = 20$$

である。よって

$$a_{210} = 20$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_{210} = 20$$

(3)

数列 $\{p_n\}$ の中に小さな自然数ができるだけ多く現れた時に, $\sum_{i=1}^{50} p_i$ の値が最小となる。

そのような数列 $\{p_n\}$ の初めの50項は

1が3個, 2が4個, 3が5個, 4が6個, 5が7個, 6が8個, 7が9個, 8が8個

並んだものである。このときの $\sum_{i=1}^{50} p_i$ は,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50} p_i &= 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 + 7 \times 9 + 8 \times 8 \\ &= 260 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 260$$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$A^2 - (1+d)A + (d+6)E = O$$

が成り立つ。これに, $A^2 = kA$ を代入すると

$$kA - (1+d)A + (d+6)E = O$$

$$\Leftrightarrow (d-k+1)A = (d+6)E \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $d-k+1 \neq 0$ だと仮定すると,

$$A = \frac{d+6}{d-k+1}E$$

となり,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & d \end{pmatrix}$$

に矛盾する。よって,

$$d-k+1=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。これを①に代入すると,

$$d+6=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。②, ③を解くと,

$$k=-5, d=-6$$

(答) $k=-5, d=-6$

(2)

(1)より $A^2 = -5A$ なので,

$$(E+bA)(E+2A) = E+cA$$

$$\Leftrightarrow E + (b+2)A + 2bA^2 = E+cA$$

$$\Leftrightarrow E + (b+2)A + 2b \cdot (-5)A = E+cA$$

$$\Leftrightarrow \{c - (-9b+2)\}A = O$$

$A \neq O$ なので,

$$c = -9b+2$$

(答) $c = -9b+2$

(3)

(2)より,

$$(E+2A)^{n+1} = (E+2A)^n (E+2A)$$

$$= (E+a_n A)(E+2A)$$

$$= E + (2-9a_n)A$$

よって,

$$a_{n+1} = 2-9a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{5} = -9 \left(a_n - \frac{1}{5} \right)$$

ゆえに,

$$a_n - \frac{1}{5} = (-9)^{n-1} \left(a_1 - \frac{1}{5} \right)$$

$$= (-9)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{5} \right)$$

$$= -\frac{(-9)^n}{5}$$

$$\therefore a_n = \frac{1 - (-9)^n}{5}$$

(答) $a_n = \frac{1 - (-9)^n}{5}$

(1)

$\sqrt{1+e^{2t}} = u$ とおくと,

$$du = \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}} dt = \frac{u^2-1}{u} dt$$

$$\Leftrightarrow dt = \frac{u}{u^2-1} du$$

であり, 積分範囲は,

t	$0 \rightarrow x$
u	$\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{1+e^{2x}}$

となるので,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x \sqrt{1+e^{2t}} dt \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} u \cdot \frac{u}{u^2-1} du \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) \right\} du \\
 &= \left[u + \frac{1}{2} \{ \log(u-1) - \log(u+1) \} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \\
 &= \left[u + \frac{1}{2} \log \frac{u-1}{u+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \\
 &= \sqrt{1+e^{2x}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\log \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \\
 &= \sqrt{1+e^{2x}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left\{ \log \left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x} \right)^2 - \log (\sqrt{2}-1)^2 \right\} \\
 &= \sqrt{1+e^{2x}} - \sqrt{2} + \log \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x} - \log (\sqrt{2}-1) \\
 &= \sqrt{1+e^{2x}} - \sqrt{2} + \log (\sqrt{1+e^{2x}}-1) - x - \log (\sqrt{2}-1)
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad F(x) = \sqrt{1+e^{2x}} - \sqrt{2} + \log (\sqrt{1+e^{2x}}-1) - x - \log (\sqrt{2}-1)$$

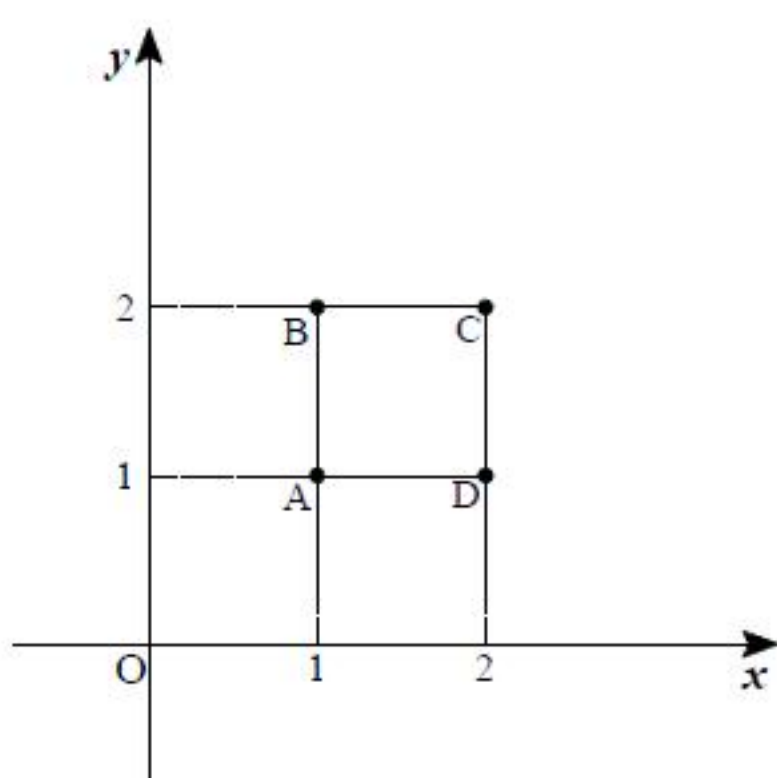
(2)

(1)の答を用いて,

$$\begin{aligned}
 F(x) - e^x &= (\sqrt{1+e^{2x}} - e^x) + \log \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{e^x} - \sqrt{2} - \log (\sqrt{2}-1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}} + e^x} + \log (\sqrt{e^{-2x}+1} - e^{-x}) - \sqrt{2} - \log (\sqrt{2}-1) \\
 &\rightarrow 0 + \log 1 - \sqrt{2} - \log (\sqrt{2}-1) \quad (x \rightarrow \infty) \\
 &= -\sqrt{2} - \log (\sqrt{2}-1)
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{F(x) - e^x\} = -\sqrt{2} - \log (\sqrt{2}-1)$$

(1)



1回の試行でA～Dに止まる確率は、それぞれ

$$A:\frac{1}{6}, B:\frac{1}{3}, C:\frac{1}{3}, D:\frac{1}{6}$$

である。O, P, Q が同一直線上にあるようなP, Qの組み合わせは次の6通りである。

$$(P, Q)=(A, A), (A, C), (B, B), (C, A), (C, C), (D, D)$$

よって、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{18}$$

となる。

(答) $\frac{7}{18}$

(2)

O, P, Q を通る2次関数 $y = f(x)$ のグラフがただ一通りに定まるようなP, Qの組み合わせは次の6通りである。

$$(P, Q)=(A, D), (D, A), (B, C), (C, B), (B, D), (D, B)$$

$y = f(x)$ のグラフがOを通るので、

$$f(x) = ax^2 + bx$$

とおくことができる。(ただし、 $a \neq 0$)

[1] $(P, Q)=(A, D), (D, A)$ のとき

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 4a+2b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

[2] $(P, Q)=(B, C), (C, B)$ のとき

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -1, b = 3$$

$$\therefore y = -x^2 + 3x$$

[3] $(P, Q)=(B, D), (D, B)$ のとき

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$$

$$(答) \begin{cases} (P, Q)=(A, D), (D, A) \text{ のとき} & y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \\ (P, Q)=(B, C), (C, B) \text{ のとき} & y = -x^2 + 3x \\ (P, Q)=(B, D), (D, B) \text{ のとき} & y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x \end{cases}$$

(3)

[1] $(P, Q)=(A, D), (D, A)$ のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

なので、 $X = \frac{9}{8}$ であり、この確率は、 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{18}$ である。

[2] $(P, Q)=(B, C), (C, B)$ のとき

$$y = -x^2 + 3x = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

なので、 $X = \frac{9}{4}$ であり、この確率は、 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{9}$ である。

[3] $(P, Q)=(B, D), (D, B)$ のとき

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{49}{24}$$

なので、 $X = \frac{49}{24}$ であり、この確率は、 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{9}$ である。

[1][2][3] 以外のときは $X = 0$ となるので、求める期待値は

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{18} + \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{9} + \frac{49}{24} \cdot \frac{1}{9} = \frac{341}{432}$$

となる。

(答) $\frac{341}{432}$