

$$(1) \quad |\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = 1$$

$$|\vec{b}| = |\overrightarrow{OB}| = 2$$

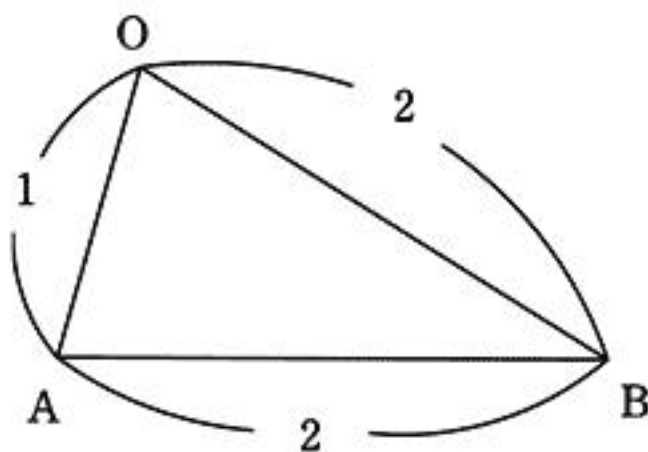
$$|\overrightarrow{AB}| = 2 \text{ より,}$$

$$|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = 2^2$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 4$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 4$$

$$2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 = 4 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$(2) \quad |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \text{ のとき,}$$

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|^2$$

$$\left| t\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a} \right|^2 = \left| t\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{b} \right|^2$$

$$(t-1)^2|\vec{a}|^2 + \frac{t^2}{4}|\vec{b}|^2 + t(t-1)\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= t^2|\vec{a}|^2 + \left(\frac{t}{2} - 1\right)^2|\vec{b}|^2 + t(t-2)\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{これを解いて, } t = \frac{6}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

このとき,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 = \left| \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \right|^2 = \frac{1}{25}|\vec{a}|^2 + \frac{6}{25}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{25}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{40}{25} \end{aligned}$$

$$\therefore AP = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(1) 奇数回で原点に戻ることはないので, $p_1 = p_3 = 0$ (答)

2回で原点に戻るには, $+1$ と -1 が1回ずつ出ればよいので,

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot {}_2C_1 = \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)}$$

4回で原点に戻るには, $+1$ と -1 が2回ずつ出ればよいので,

$$p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_4C_2 = \frac{3}{8} \quad \text{.....(答)}$$

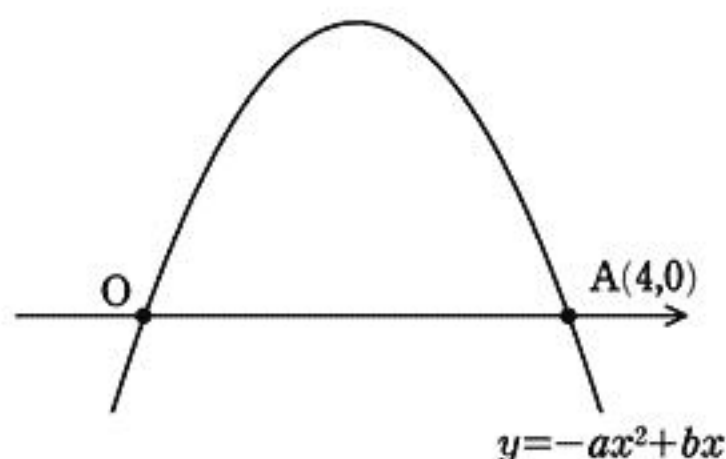
(2) 6回で原点に戻るには, $+2$ が2回, -1 が4回出ればよいので,

$$p_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot {}_6C_2 = \frac{15}{64} \quad \text{.....(答)}$$

(1) $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ を通ることより,

$$\begin{cases} 0 = -a \cdot 0^2 + b \cdot 0 \\ 0 = -a \cdot 4^2 + b \cdot 4 \end{cases}$$

よって, $b = 4a$ (答)



(2) 条件を満たすには,

$0 \leq x \leq 3$ で放物線は直線 $OB: y = x$ 以下の部分にあり,

$3 \leq x \leq 4$ で放物線は直線 $BA: y = -3x + 12$ 以下の部分にあればよい.

$$\begin{cases} x - (-ax^2 + 4ax) \geq 0 & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

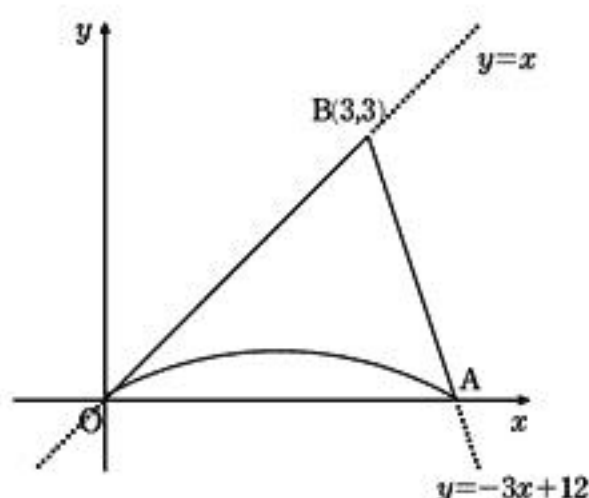
$$\begin{cases} -3x + 12 - (-ax^2 + 4ax) \geq 0 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - (4a - 1)x \geq 0 & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - (4a + 3)x + 12 \geq 0 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\{ax - (4a - 1)\} \geq 0 & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

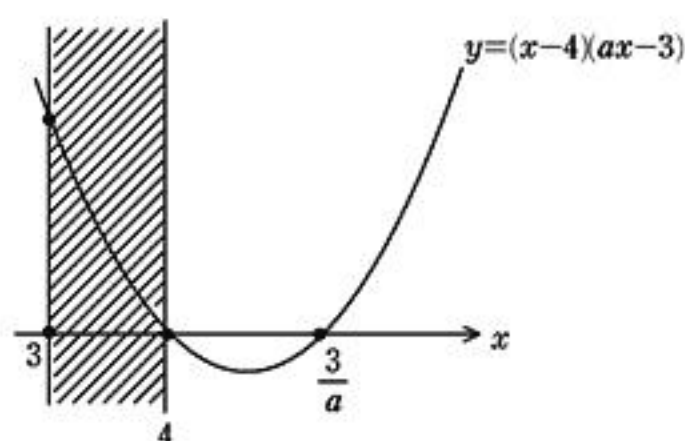
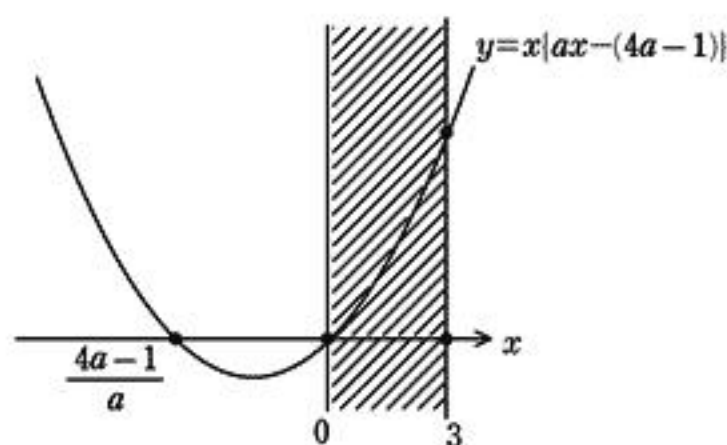
$$\begin{cases} (x - 4)(ax - 3) \geq 0 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$



条件を満たすには, $y = x\{ax - (4a - 1)\}$ のグラフと, $y = (x - 4)(ax - 3)$ のグラフ

より, $\frac{4a-1}{a} \leq 0$ かつ $\frac{3}{a} \geq 4$ であればよい.

$$\frac{4a-1}{a} \leq 0 \text{ かつ } \frac{3}{a} \geq 4 \quad \therefore 0 < a \leq \frac{1}{4} \quad \text{.....(答)}$$



(3) $\triangle OAB = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$

$y = -ax^2 + bx$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (-ax^2 + bx) dx \\ &= \int_0^4 (-ax^2 + 4ax) dx \\ &= \frac{32}{3}a \end{aligned}$$

$\frac{32}{3}a = 6 \times \frac{1}{3}$ のとき,

$$a = \frac{3}{16} \quad \text{.....(答)}$$

$$(1) \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

よって,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \square$$

$$(2) \quad (1) \text{ より, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$$

(1) で, a, b を $\sqrt{ab}, \sqrt{cd}$ とすれば,

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

よって,

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \leq \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4} \quad \square$$

(3) (2) で $b=c=d$ とすると

$$\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4} \quad \square$$