

$$(1) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad A^2 \neq E$$

$$A^3 = -E \neq E$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \neq E$$

$$A^5 = A^3 \cdot A = -A^2 \neq E$$

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-E) \cdot (-E) = E$$

よって、条件を満たす最小の n は 6 $\dots\dots(\text{答})$

$$(3) \quad A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = A + A^2 - E - A - A^2 + E = O$$

よって,

$$\begin{aligned} & A + A^2 + A^3 + \dots A^{100} \\ &= (A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6) + A^6(A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6) + \dots \\ &\quad + A^{90}(A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6) + A^{96}(A + A^2 + A^3 + A^4) \\ &= A^{96}(-A^5 - A^6) \\ &= (A^6)^{16}(A^2 - E) \\ &= E^{16}(A^2 - E) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) 1秒後には+1または-1に移動しているので, $p_1 = 0$ (答)

2秒後に原点に戻るには, +1の移動と-1の移動をそれぞれ1回ずつ行えばよいので,

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot {}_2C_1 = \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)}$$

(2) n が奇数のとき, 奇数のめもり上にいるので, $p_n = 0$

n が偶数のとき, n 秒後に原点に戻るには, +1の移動と-1の移動をそれぞれ $\frac{n}{2}$ 回ずつ行えばよいので,

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot {}_nC_{\frac{n}{2}} = \frac{{}_nC_{\frac{n}{2}}}{2^n}$$

以上より,

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{{}_nC_{\frac{n}{2}}}{2^n} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \text{.....(答)}$$

(3) +3が m 回, -1が l 回出て原点に戻るとき, $3m - l = 0 \therefore l = 3m$

したがって, $n = m + l = m + 3m = 4m$ であるから, n が4の倍数でないとき,

$$p_n = 0$$

n が4の倍数のとき, n 秒後に原点に戻るには, +3の移動を $\frac{n}{4}$ 回, -1の移動を $\frac{3}{4}n$ 回行えばよいので,

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n}{4}} \cdot {}_nC_{\frac{n}{4}} = \frac{{}_nC_{\frac{n}{4}}}{2^n}$$

以上より,

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が4の倍数でないとき}) \\ \frac{{}_nC_{\frac{n}{4}}}{2^n} & (n \text{ が4の倍数のとき}) \end{cases} \quad \text{.....(答)}$$

$$(1) \quad |\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = 1$$

$$|\vec{b}| = |\overrightarrow{OB}| = 2$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 2 \text{ より,}$$

$$|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = 2^2$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 = 2^2$$

$$2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 角の二等分線の性質より,
OP と AB の交点を Q とすると,

$$AQ : QB = 1 : 2$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

OQ 上に P があることから,

$$\overrightarrow{OP} = k(2\vec{a} + \vec{b}) \text{ とおける.}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \text{ より,}$$

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|$$

$$|(2k-1)\vec{a} + k\vec{b}|^2 = |2k\vec{a} + (k-1)\vec{b}|^2$$

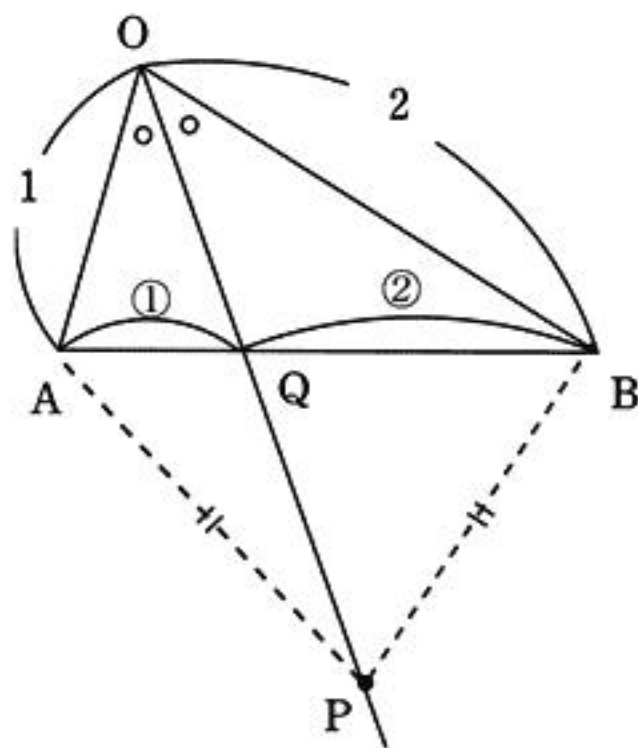
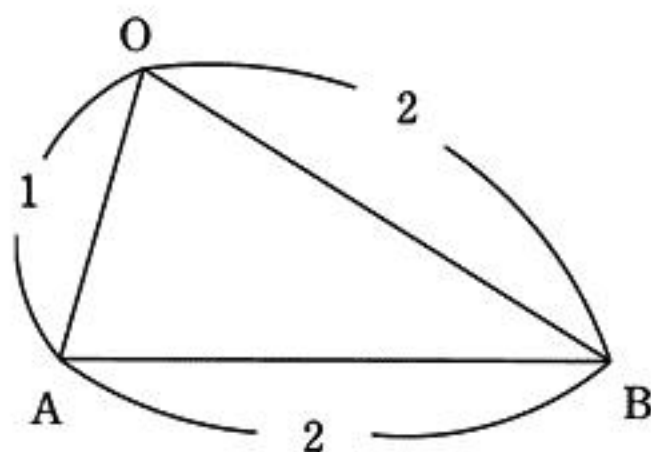
$$(2k-1)^2|\vec{a}|^2 + 2k(2k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2|\vec{b}|^2 = 4k^2|\vec{a}|^2 + 4k(k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (k-1)^2|\vec{b}|^2$$

$$(2k-1)^2 + 2k(2k-1) \cdot \frac{1}{2} + k^2 \cdot 4 = 4k^2 + 4k(k-1) \cdot \frac{1}{2} + (k-1)^2 \cdot 4$$

$$\text{これを解いて, } k = \frac{3}{5}$$

$$\text{このとき, } |\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 = \left| \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \right|^2 = \frac{1}{25}|\vec{a}|^2 + \frac{6}{25}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{25}|\vec{b}|^2 = \frac{40}{25}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$\begin{aligned}
 (1) \quad g(x) &= \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t+x) dt \\
 &= \int_0^{\pi} t \cdot \cos(t+x) dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi-t) \cos(t+x) dt \\
 &= [t \cdot \sin(t+x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t+x) dt \\
 &\quad + [(2\pi-t) \cdot \sin(t+x)]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(t+x) dt \\
 &= \pi \sin(\pi+x) + [\cos(t+x)]_0^{\pi} - \pi \sin(\pi+x) - [\cos(t+x)]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= \cos(\pi+x) - \cos x - \cos(2\pi+x) + \cos(\pi+x) \\
 &= -\cos x - \cos x - \cos x - \cos x \\
 &= -4\cos x \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t+x) dt \\
 &= \int_0^{\pi} t \cdot \sin(t+x) dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi-t) \sin(t+x) dt \\
 &= [t \{-\cos(t+x)\}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \{-\cos(t+x)\} dt \\
 &\quad + [(2\pi-t) \cdot \{-\cos(t+x)\}]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \{-\cos(t+x)\} dt \\
 &= -\pi \cos(\pi+x) + [\sin(t+x)]_0^{\pi} + \pi \cos(\pi+x) - [\sin(t+x)]_{\pi}^{2\pi} \\
 &= \pi \cos x + \sin(\pi+x) - \sin x - \pi \cos x - \sin(2\pi+x) + \sin(\pi+x) \\
 &= \pi \cos x - \sin x - \sin x - \pi \cos x - \sin x - \sin x \\
 &= -4\sin x \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= g(x) + h(x) \\
 &= -4\cos x - 4\sin x \\
 &= -4\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ のとき, } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

よって, y の最大値は $4\sqrt{2}$, 最小値は $-4\sqrt{2}$ $\dots\dots(\text{答})$

(1)

$$\begin{cases} f(-1) = -1 + a - b + c \\ f(0) = c \\ f(1) = 1 + a + b + c \end{cases} \quad \text{より,} \quad \begin{cases} a = \frac{f(-1) + f(1) - 2f(0)}{2} \\ b = \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2} \\ c = f(0) \end{cases}$$

よって,

$$f(x) = x^3 + \frac{f(-1) + f(1) - 2f(0)}{2}x^2 + \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2}x + f(0)$$

となるので,

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 + \frac{f(-1) + f(1) - 2f(0)}{2}n^2 + \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2}n + f(0) \\ &= n^3 - n + f(-1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} - f(0) \cdot (n+1)(n-1) + f(1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

ここで, $n, n-1$ や $n, n+1$ は連続した 2 つの整数であるから,

$$\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} \text{ は整数. よって, } f(-1), f(0), f(1) \text{ が整数であるならば,}$$

すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数. $\square$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(2011+x) &= (2011+x)^3 + a(2011+x)^2 + b(2011+x) + c \\ &= x^3 + (3 \cdot 2011 + a)x^2 + (3 \cdot 2011^2 + 2 \cdot 2011a + b)x \\ &\quad + 2011^3 + 2011^2a + 2011b + c \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{cases} 3 \cdot 2011 + a = a' \\ 3 \cdot 2011^2 + 2 \cdot 2011a + b = b' \\ 2011^3 + 2011^2a + 2011b + c = c' \end{cases}$$

と新たにおき, $f(2011+x) = x^3 + a'x^2 + b'x + c' = g(x)$ とおくと,

a', b', c' は実数で, $g(-1) = f(2010)$, $g(0) = f(2011)$, $g(1) = f(2012)$ が整数であるから, (1) より, $g(n)$ はすべての整数 n に対して整数となる.

よって, $f(n) = g(n-2011)$ はすべての n に対して整数となる. $\square$