

平成 23 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で 5 ページある。(落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。)

別に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部、学科により解答すべき問題(○印)、解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受験学部, 学科	解答すべき問題(○印)					解答用紙 の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(数学科, 物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部(化学科, 生物学科, 自然環境科学科)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4 枚	90 分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) A^2, A^3 を求めよ。

(2) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(3) $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$ を求めよ。

2 数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。 n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし、 n は自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき、 p_1 , p_2 を求めよ。
- (2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき、 p_n を求めよ。
- (3) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 3 または負の向きに 1 移動するとき、 p_n を求めよ。

3 $\triangle OAB$ において、 $OA = 1$ ， $OB = AB = 2$ とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。
このとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\angle AOB$ の二等分線上の点 P が $AP = BP$ を満たすとき、線分 AP の長さを求めよ。

4 関数

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t \leq 2\pi) \end{cases}$$

に対して、次のように2つの関数 $g(x)$, $h(x)$ を $0 \leq x \leq 2\pi$ で定義する。

$$g(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t+x) dt, \quad h(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t+x) dt$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $g(x)$, $h(x)$ を求めよ。
- (2) x が $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲を動くとき、関数 $y = g(x) + h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

5 実数 a, b, c に対して、3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(-1), f(0), f(1)$ が整数であるならば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は整数であることを示せ。
- (2) $f(2010), f(2011), f(2012)$ が整数であるならば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は整数であることを示せ。