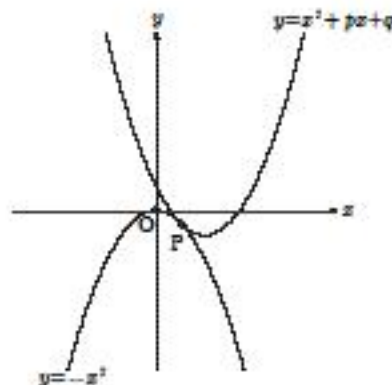


(1)



$$y = -x^2 \text{ について, } y' = -2x$$

$$y = x^2 + px + q \text{ について,}$$

$$y' = 2x + p$$

$P(a, b)$ における接線が一致していることより,

$$\begin{cases} -2a = 2a + p & \cdots \cdots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a^2 = a^2 + pa + q (= b) & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } b = -a^2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } p = -4a \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して, } -a^2 = a^2 + (-4a) \cdot a + q$$

$$\therefore q = 2a^2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad a = 1 \text{ のとき, } b = -1, p = -4, q = 2$$

$$\therefore \int_0^1 \{x^2 - 4x + 2 - (-x^2)\} dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \text{ より, } D \text{ の頂点は } \left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q\right)$$

頂点を (X, Y) とおくと,

$$\begin{cases} X = -\frac{p}{2} = \frac{-4a}{2} = 2a \\ Y = -\frac{p^2}{4} + q = -\frac{(-4a)^2}{4} + 2a^2 = -2a^2 \end{cases}$$

2式より a を消去して,

$$Y = -\frac{1}{2}X^2$$

$$\text{よって, } D \text{ の頂点は放物線 } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ を描く.} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (1) $\log_{10} 3 = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数) とおけるとすると,

$$10^{\frac{q}{p}} = 3$$

両辺 p 乗して, $10^q = 3^p$ (*)

$10, 3$ は互いに素ゆえ, 10^q は 3 の倍数でない. したがって, (*) は成り立たない.

よって, $\log_{10} 3$ は無理数 $\square$

- (2) $3^{13} = 1594323 > 10^6$ より,

$$3 > 10^{\frac{6}{13}}$$

$$\therefore \log_{10} 3 > \frac{6}{13}$$

$$3^2 = 9 < 10^1 \text{ より,}$$

$$3 < 10^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \log_{10} 3 < \frac{1}{2} \quad \square$$

- (3) 3^{26} が m 桁の数, すなわち, $10^{m-1} < 3^{26} < 10^m$ とおくと,

$$\log_{10} 10^{m-1} < \log_{10} 3^{26} < \log_{10} 10^m$$

$$m-1 < 26 \log_{10} 3 < m$$

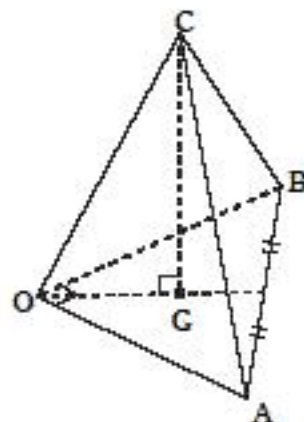
ここで, (2) より,

$$26 \cdot \frac{6}{13} < 26 \log_{10} 3 < 26 \cdot \frac{1}{2}$$

$$12 < 26 \log_{10} 3 < 13$$

$$\therefore m = 13$$

..... (答)



$$\begin{aligned}
 \text{(1)} \quad \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC} \\
 &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad &\text{平面 } OAB \perp CG \text{ より,} \\
 &\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CG} = 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \\
 &\begin{cases} \vec{a} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right) = 0 \\ \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} \end{cases}$$

ここで、 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$ であり、 $OA \perp OB$ より、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 = \frac{16}{3} \end{cases} &\quad \dots\dots (\text{答}) \\
 &\quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(3)} \quad |\overrightarrow{CG}| &= \left| \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right| = \sqrt{\frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 3^2 + \frac{1}{9} \cdot 4^2 + 5^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore OABC = OA \times OB \times \frac{1}{2} \times CG \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3}\sqrt{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (1) 同じ数字を3回引けばよいので、

$$\frac{9 \cdot 1 \cdot 1}{9^3} = \frac{1}{81}$$

..... (答)

- (2) $5 < m$ となるには、すべて6以上となればよいので、

$$P(5 < m) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$$

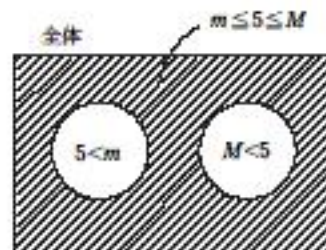
..... (答)

$M < 5$ となるには、すべて4以下となればよいので、

$$P(M < 5) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$$

..... (答)

- (3)



$$P(m \leq 5 \leq M) = 1 - P(5 < m) - P(M < 5)$$

$$= 1 - \frac{64}{729} \times 2 = \frac{601}{729}$$

..... (答)