

$$(1) \quad 2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \leq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{k-1 \text{ 個}} \cdot \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_k$$

$$\leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k \cdot n^k = n^k \cdot k! \quad \square$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{n} + {}_nC_2 \cdot \frac{1}{n^2} + {}_nC_3 \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} + {}_nC_n \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n}{1!n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} \\ &\quad + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-1)!n^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!n^n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\because (1)) \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 1 + 2 = 3 \quad \square \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} = \log_{10} \sqrt{10} > \log_{10} \sqrt{9} = \log_{10} 3$$

また、(2)で $n=9$ のとき、

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^9 < 3$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^9 < 3$$

$$\log_{10} \left(\frac{10}{9}\right)^9 < \log_{10} 3$$

$$9 \log_{10} \frac{10}{9} < \log_{10} 3$$

$$9(1 - \log_{10} 9) < \log_{10} 3$$

$$9(1 - \log_{10} 3^2) < \log_{10} 3$$

$$9(1 - 2 \log_{10} 3) < \log_{10} 3$$

$$9 < 19 \log_{10} 3$$

$$\frac{9}{19} < \log_{10} 3$$

$$\therefore \frac{9}{19} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2} \quad \square$$

(別解)

$$3^{19} = 3^{10} \times 3^9 = 59049 \times 19683 > 59000 \times 19000 = 1121000000$$

$$> 10^9$$

$$\therefore \log_{10} 3^{19} > \log_{10} 10^9$$

$$19 \log_{10} 3 > 9$$

$$\log_{10} 3 > \frac{9}{19}$$

$$\therefore \frac{9}{19} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2} \quad \square$$

$$(1) \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = px + q \end{cases} \text{ を連立して解いて, } x^2 = px + q \quad x^2 - px - q = 0$$

$$\text{接することより, } p^2 + 4q = 0 \quad \therefore q = -\frac{1}{4}p^2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = y^2 + a \\ y = px - \frac{1}{4}p^2 \end{cases} \text{ を連立して解いて, } y = p(y^2 + a) - \frac{1}{4}p^2$$

$$py^2 - y + ap - \frac{1}{4}p^2 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$\text{接することより, } 1 - 4p\left(ap - \frac{1}{4}p^2\right) = 0 \quad 1 + p^3 = 4p^2a$$

$p = 0$  のとき,  $(*)$  は重解をもたないので,  $p \neq 0$

$$\therefore a = \frac{1 + p^3}{4p^2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad f(p) = \frac{1 + p^3}{4p^2} \text{ とおく.}$$

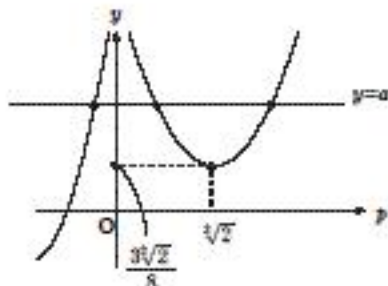
$$f'(p) = \frac{3p^2 \cdot 4p^2 - (1 + p^3) \cdot 8p}{16p^4} = \frac{p^5 - 2}{4p^3}$$

$$f(\sqrt[3]{2}) = \frac{1 + 2}{4(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{3}{4(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$$

よって, グラフより,

$$\begin{cases} a > \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} \text{ のとき, 3 本} \\ a = \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} \text{ のとき, 2 本} \\ a < \frac{3\sqrt[3]{2}}{8} \text{ のとき, 1 本} \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

| $p$     | ... | 0 | ... | $\sqrt[3]{2}$            | ... |
|---------|-----|---|-----|--------------------------|-----|
| $f'(p)$ | +   | × | -   | 0                        | +   |
| $f(p)$  | ↗   |   | ↘   | $\frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$ | ↗   |



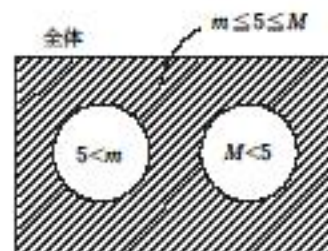
- (1)  $5 < m$  となるには、すべて 6 以上となればよいので、

$$p(5 < m) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$M < 5$  となるには、すべて 4 以下となればよいので、

$$p(M < 5) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (2)



$$\begin{aligned} p(m \leq 5 \leq M) &= 1 - p(5 < m) - p(M < 5) \\ &= 1 - \frac{64}{729} \times 2 = \frac{601}{729} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3)

$$p(m \leq 1 \leq M) = 1 - p(1 < m) - p(M < 1) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 - 0 = \frac{217}{729}$$

$$p(m \leq 2 \leq M) = 1 - p(2 < m) - p(M < 2) = 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^3 - \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{385}{729}$$

$$p(m \leq 3 \leq M) = 1 - p(3 < m) - p(M < 3) = 1 - \left(\frac{6}{9}\right)^3 - \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{505}{729}$$

$$p(m \leq 4 \leq M) = 1 - p(4 < m) - p(M < 4) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^3 - \left(\frac{3}{9}\right)^3 = \frac{577}{729}$$

また、対称性を考えれば、

$$p(m \leq 1 \leq M) = p(m \leq 9 \leq M), \quad p(m \leq 2 \leq M) = p(m \leq 8 \leq M),$$

$$p(m \leq 3 \leq M) = p(m \leq 7 \leq M), \quad p(m \leq 4 \leq M) = p(m \leq 6 \leq M)$$

$$\text{よって、} p(k) \text{ は } \begin{cases} k=5 \text{ のとき、最大値 } \frac{601}{729} \\ k=1, 9 \text{ のとき、最小値 } \frac{217}{729} \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

をとる。

(1)  $f(x) = x - \log(1+x)$  とおく.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$$f(0) = 0 - \log 1 = 0$$

よって、増減表より、 $x \geq 0$  のとき、 $f(x) \geq 0$   $\therefore \log(1+x) \leq x$

$g(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)$  とおく.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

$$g(0) = \log 1 - (0 - 0) = 0$$

よって、増減表より、 $x \geq 0$  のとき、 $g(x) \geq 0$   $\therefore x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x)$

以上より、 $x \geq 0$  のとき、 $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$   $\square$

(2) (1)より、 $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x$  ( $x \geq 0$ ) であるから、

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} x dx$$

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx \leq \frac{1}{2n^2}$$

$$n^2 \left( \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx \leq n^2 \cdot \frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

よって、はさみうちの原理により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx = \frac{1}{2}$  ..... (答)

(3) (1)より、

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right) \leq \sum_{k=1}^n \log \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \times \frac{1}{2n} = \int_0^1 x dx - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

よって、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{..... (答)}$$

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| $x$     | 0 | ... |
| $f'(x)$ | 0 | +   |
| $f(x)$  | 0 | ↗   |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| $x$     | 0 | ... |
| $g'(x)$ | 0 | +   |
| $g(x)$  | 0 | ↗   |