

1 xy 平面上に放物線 $C: y = -x^2$ がある。 $P(a, b)$ を C 上の点とする。放物線 $D: y = x^2 + px + q$ は点 P を通り、点 P における C の接線と D の接線は一致している。次の問いに答えよ。

- (1) b, p, q をそれぞれ a で表せ。
- (2) $a = 1$ のとき、放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 点 $P(a, b)$ が放物線 C 上を動くとき、放物線 D の頂点の軌跡を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを示せ。

(2) $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 3^{26} の桁数を求めよ。

3 四面体 $OABC$ において, $OA \perp OB$, $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 5$ とする。 $\triangle OAB$ の重心を G とし, 直線 CG は $\triangle OAB$ を含む平面に垂直とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{CG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

4 箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き、カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m ，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

- (1) $m = M$ となる確率を求めよ。
- (2) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。
- (3) $m \leq 5 \leq M$ となる確率を求めよ。