

1 平面上の点 $P(x, y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定められる点 $Q(X, Y)$ に移す移動を考える。ここで、 a は実数とする。楕円 $C: x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられているとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 $P(x, y)$ が楕円 C 上を動くとき、点 $Q(X, Y)$ は円 $D: X^2 + Y^2 = 1$ 上を動くとする。このとき a の値を求めよ。

(2) 点 $P(x, y)$ が楕円 C 上を動くとき、点 $Q(X, Y)$ は直線 $l: Y = pX + q$ 上を動くとする。ただし p, q は実数とする。このとき a および p, q の値を求めよ。

(3) (2)において、点 $P(x, y)$ が楕円 C 上を動くとき、点 $Q(X, Y)$ の X の最大値、最小値を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) k, n は不等式 $k \leq n$ を満たす自然数とする。このとき,

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \leq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

(3) $\frac{9}{19} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

3 a を実数とし、 xy 平面上において、2つの放物線

$$C: y = x^2, \quad D: x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) p, q を実数として、直線 $l: y = px + q$ が C に接するとき、 q を p で表せ。
- (2) (1)において、直線 l がさらに D にも接するとき、 a を p で表せ。
- (3) C と D の両方に接する直線の本数を、 a の値によって場合分けして求めよ。

4 箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き、カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値を m ，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

- (1) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。
- (2) $m \leq 5 \leq M$ となる確率を求めよ。
- (3) $k = 1, 2, \dots, 9$ に対して、 $m \leq k \leq M$ となる確率を $p(k)$ とする。 $p(k)$ の最大値，最小値を求めよ。

5 次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x \geq 0$ に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。