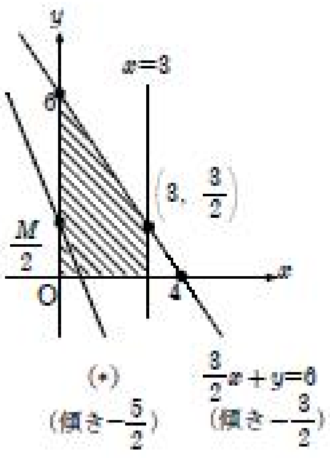
$\boxed{1}$

(1)

$$D:\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+y\leqq 6\\ 0\leqq x\leqq 3\\ 0\leqq y\end{cases}$$ は図の通り（境界を含む）



$5x+2y=M$ とおく．

$$y=-\frac{5}{2}x+\frac{M}{2}\ \cdots\cdots(*)$$

は傾き $-\dfrac{5}{2}$，y 切片 $\dfrac{M}{2}$ の直線．

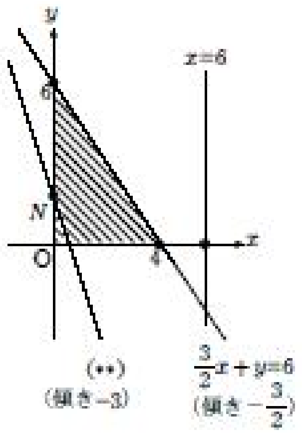
$(*)$が D と共通点をもてばよい．

$(*)$が $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通るとき，$\dfrac{M}{2}$ は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

よって，M の最大値は $(x,\ y)=\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，18　　… (答)

(2)

$$D:\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+y\leqq 6\\ 0\leqq x\leqq 6\\ 0\leqq y\end{cases}$$ は図の通り（境界を含む）



$3x+y=N$ とおく．

$$y=-3x+N\ \cdots\cdots(**)$$

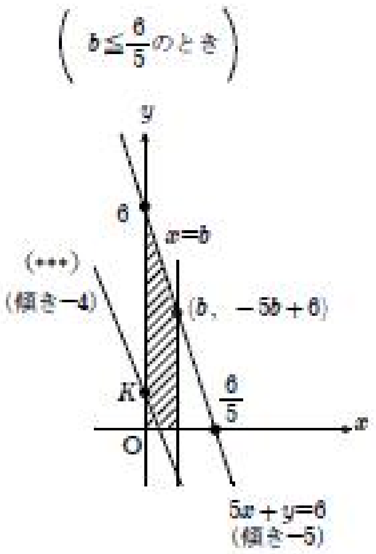
は傾き -3，y 切片 N の直線．

$(**)$が D と共通点をもてばよい．

$(**)$が$(4,\ 0)$を通るとき，N は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

よって，N の最大値は $(x,\ y)=(4,\ 0)$ のとき，12　　… (答)

(3)



$$D:\begin{cases}5x+y\leqq 6\\ 0\leqq x\leqq b\\ 0\leqq y\end{cases}$$ は図の通り（境界を含む）

$4x+y=K$ とおく．

$$y=-4x+K\ \cdots\cdots(***)$$

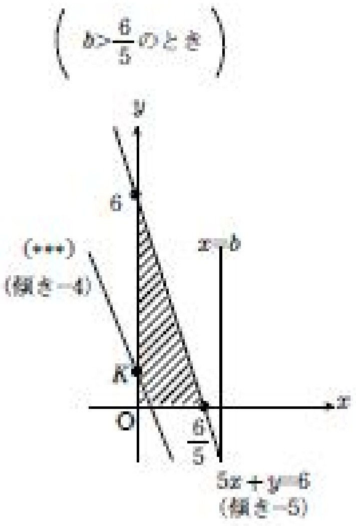
は傾き -4，y 切片 K の直線．

$(***)$が D と共通点をもてばよい．

$\left[b\leqq\dfrac{6}{5}\text{ のとき}\right]$

$(***)$が，$(0,\ 6)$を通るとき，K は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

$\left[b>\dfrac{6}{5}\text{ のとき}\right]$



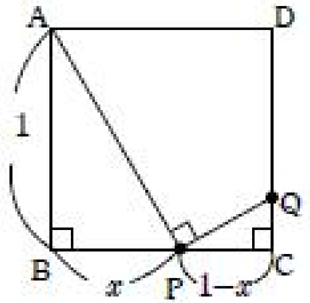
このときも，$(***)$が$(0,\ 6)$を通るとき，

K は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

よって，K の最大値は $(x,\ y)=(0,\ 6)$ のとき，6　　… (答)

$\boxed{2}$

(1)



$\triangle ABP \backsim \triangle PCQ$ より，$1 : x = 1-x : CQ$

$\therefore\ CQ = x(1-x)$

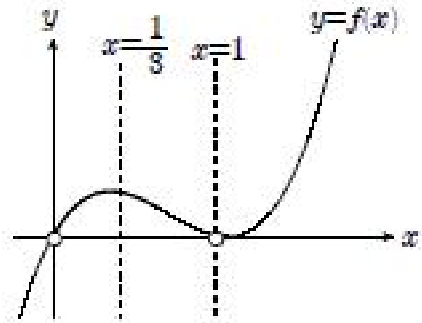
$\therefore\ S = (1-x)\times x(1-x)\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{x(1-x)^2}{2}$ $\cdots$（答）

(2) $f(x) = x(1-x)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ とおく．

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$

グラフより，$0 < x < 1$ のとき，

$f(x)$ は，$x = \dfrac{1}{3}$ で最大となる． $\cdots$（答）



$$\therefore\ \max S = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = \frac{2}{27} \cdots \text{（答）}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

(3) $L^2 = AP^2 + PQ^2 = \left(AB^2 + BP^2\right) + \left(PC^2 + CQ^2\right) = 1^2 + x^2 + (1-x)^2 + x^2(1-x)^2$

$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = g(x)$ とおく．

$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 2\left(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = 2(2x-1)\left(x^2 - x + 1\right)$

増減表より，$0 < x < 1$ のとき，

$g(x)$ は，$x = \dfrac{1}{2}$ で最小となる． $\cdots$（答）

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

$$\therefore\ \min L = \sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 + 2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} \cdots \text{（答）}$$

$\boxed{3}$

$$a_n=\sqrt{1+n^2}-n=\frac{\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)\left(\sqrt{1+n^2}+n\right)}{\sqrt{1+n^2}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$$

(1) $\left(\sqrt{1+n^2}+n\right)-2n=\sqrt{1+n^2}-n=\sqrt{1+n^2}-\sqrt{n^2}>0$ より，

$\sqrt{1+n^2}+n>0 \quad (>0)$ $\qquad \therefore \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}<\dfrac{1}{2n}$

$2n+1-\left(\sqrt{1+n^2}+n\right)=n+1-\sqrt{1+n^2}=\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+1}>0$ より，

$2n+1>\sqrt{1+n^2}+n \quad (>0)$ $\qquad \therefore \dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$

よって，$\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$ □

(2) (1)より，$\dfrac{1}{2(n+1)+1}<a_{n+1}<\dfrac{1}{2(n+1)}$ $\qquad \therefore \dfrac{1}{2n+3}<a_{n+1}<\dfrac{1}{2n+2}$

$\dfrac{1}{2n+2}<\dfrac{1}{2n+1}$ より， $\qquad a_{n+1}<a_n$ □

(3) $0.03=\dfrac{3}{100}=\dfrac{1}{33.3\cdots}$

また，$\dfrac{1}{2-17+1}<a_{17}<\dfrac{1}{2\cdot17}$，$\dfrac{1}{2\cdot16+1}<a_{16}<\dfrac{1}{2\cdot16}$ より，

$\dfrac{1}{35}<a_{17}<\dfrac{1}{34}$，$\dfrac{1}{33}<a_{16}<\dfrac{1}{32}$

$\dfrac{1}{34}<\dfrac{1}{33.3\cdots}<\dfrac{1}{33}$ より，求める最小の整数 n は　17 $\qquad$ …（答）

$\boxed{4}$

(1) $$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)dx=2\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(kmx^2+ln\right)dx$$

$$=2\left[\frac{km}{3}x^3+lnx\right]_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}km+\sqrt{3}ln\right)=2\sqrt{3}\,(km+ln)$$ …（答）

(2) $g(x)=kx+l$, $h(x)=mx+n$ とおく．

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\,(km+ln)=km+ln=(k,\,l)\cdot(m,\,n)=\vec{g}\cdot\vec{h}$$ ∎

(3) (2)より，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2\,dx=2\sqrt{3}\left|\vec{g}\right|^2$

$$\therefore\ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2\,dx=2\sqrt{3}\left|(2,\,1)\right|^2\cdot 2\sqrt{3}\left|\vec{g}\right|^2=12\left|(2,\,1)\right|^2\left|\vec{g}\right|^2$$

また，(1)より，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)dx=2\sqrt{3}\,(2,\,1)\cdot\vec{g}$

$$\therefore\ \left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)dx\right\}^2=\left\{2\sqrt{3}\,(2,\,1)\vec{g}\right\}^2=12\left\{(2,\,1)\vec{g}\right\}^2$$

よって，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2\,dx=\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)dx\right\}^2$ のとき，

$$12\left|(2,\,1)\right|^2\left|\vec{g}\right|^2=12\left\{(2,\,1)\cdot\vec{g}\right\}^2$$

$(2,1)$ と $\vec{g}$ のなす角を θ とすると，

$$12\left|(2,\,1)\right|^2\left|\vec{g}\right|^2=12\left|(2,\,1)\right|^2\left|\vec{g}\right|^2\cos^2\theta$$

$g(0)=-2$ より，$\left|\vec{g}\right|^2\neq 0$ $\quad\therefore\ \cos^2\theta=1$

よって，$(2,1)$ と $\vec{g}$ は平行．

$\vec{g}=r(2,1)$，すなわち，$g(x)=2rx+r$ とおくと，$g(0)=-2$ より，

$r=-2$

$\therefore\ g(x)=-4x-2$ …（答）