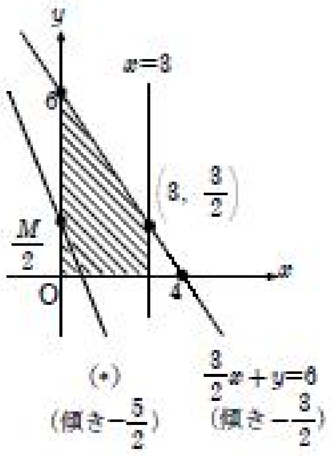
$\boxed{1}$

(1)

$$D:\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+y\leqq 6\\ 0\leqq x\leqq 3\\ 0\leqq y\end{cases}$$ は図の通り（境界を含む）



$5x+2y=M$ とおく．

$$y=-\frac{5}{2}x+\frac{M}{2}\ \cdots\cdots(*)$$

は傾き $-\dfrac{5}{2}$，y 切片 $\dfrac{M}{2}$ の直線．

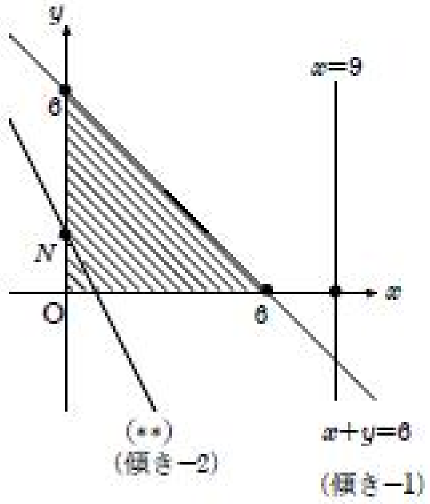
$(*)$が D と共通点をもてばよい．

$(*)$が $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通るとき，$\dfrac{M}{2}$ は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

よって，M の最大値は $(x,\ y)=\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，18 をとる．　　… (答)

(2)

$$D:\begin{cases}x+y\leqq 6\\ 0\leqq x\leqq 9\\ 0\leqq y\end{cases}$$ は図の通り（境界を含む）



$2x+y=N$ とおく．

$$y=-2x+N\ \cdots\cdots(**)$$

は傾き -2，y 切片 N の直線．

$(**)$が D と共通点をもてばよい．

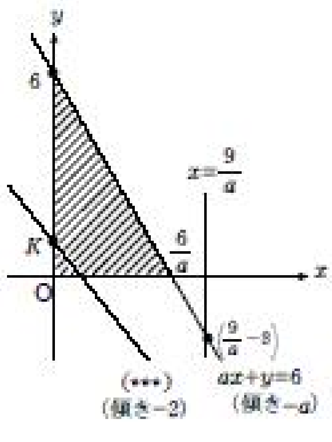
$(**)$が$(6,\ 0)$を通るとき，N は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

よって，N は $(x,\ y)=(6,\ 0)$のとき，最大値 12 をとる．　　… (答)

(3)

$$D:\begin{cases}ax+y\leqq 6\\ 0\leqq x\leqq \dfrac{9}{a}\\ 0\leqq y\end{cases}$$ は図の通り（境界を含む）

$(-a\geqq -2$ のとき$)$



$2x+y=K$ とおく．

$$y=-2x+K\ \cdots\cdots(***)$$

は傾き -2，y 切片 K の直線．

$(***)$が D と共通点をもてばよい．

$[-a\geqq -2$ のとき$]$

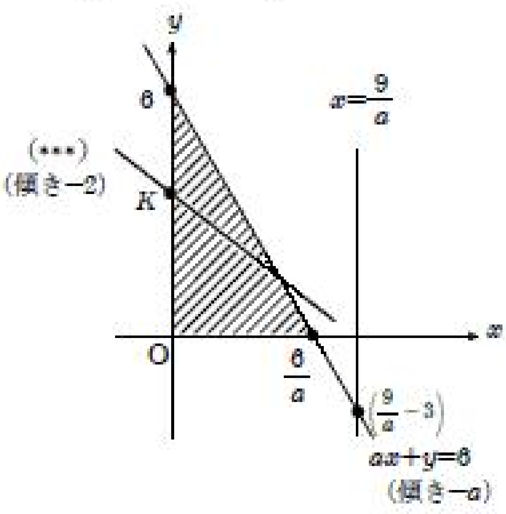
$(***)$が，$\left(\dfrac{6}{a},\ 0\right)$ を通るとき，K は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

よって，K は $(x,\ y)=\left(\dfrac{6}{a},\ 0\right)$ のとき，最大値 $\dfrac{12}{a}$ をとる．

$\dfrac{12}{a}=16$ のとき，$a=\dfrac{3}{4}$，$ab=9$ より，$b=12$

これは，$-a\geqq -2$，すなわち，$a\leqq 2$ をみたす．

$(-a<-2$ のとき$)$



$[-a<-2$ のとき$]$

$(***)$が$(0,\ 6)$を通るとき，

K は最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき，最小となる．

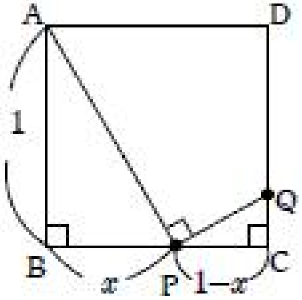
よって，K は $(x,\ y)=(0,\ 6)$のとき，最大値 6 をとる．

これは，最大値が 16 であることに矛盾．

以上より，$(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{4},\ 12\right)$　　… (答)

$\boxed{2}$

(1)



$\triangle \mathrm{ABP} \backsim \triangle \mathrm{PCQ}$より，$1:x=1-x:\mathrm{CQ}$

$\therefore\ \mathrm{CQ}=x(1-x)$

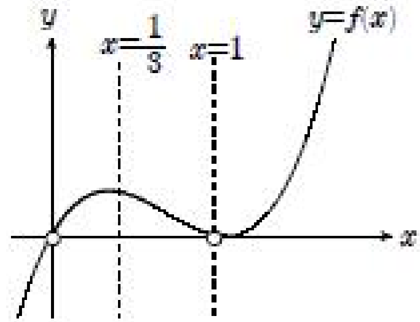
$\therefore\ S=(1-x)\times x(1-x)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{x(1-x)^2}{2}$ $\cdots$（答）

(2) $f(x)=x(1-x)^2=x^3-2x^2+x$ とおく．

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

グラフより，$0<x<1$ のとき，

$f(x)$ は，$x=\dfrac{1}{3}$ で最大となる． $\cdots$（答）



$$\therefore\ \max S=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{2}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2}=\frac{2}{27}\cdots\text{（答）}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

(3) $L^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2=\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BP}^2\right)+\left(\mathrm{PC}^2+\mathrm{CQ}^2\right)=1^2+x^2+(1-x)^2+x^2(1-x)^2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+2=g(x)$ とおく．

$g'(x)=4x^3-6x^2+6x-2=2\left(2x^3-3x^2+3x-1\right)=2(2x-1)\left(x^2-x+1\right)$

増減表より，$0<x<1$ のとき，

$g(x)$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で最小となる． $\cdots$（答）

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

$$\therefore\ \min L=\sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-1+2}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}\cdots\text{（答）}$$

$\boxed{3}$

$A=\begin{pmatrix} a & -4 \\ -\dfrac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$ のとき，ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2-(a+2)A-aE=0$

$\therefore\ A^2=(a+2)A+aE$

(1) $A^3=A\cdot A^2=A\cdot\{(a+2)A+aE\}=(a+2)A^2+aA$

$=(a+2)\{(a+2)A+aE\}+aA=\left(a^2+5a+4\right)A+a(a+2)E$

$=\left(a^2+5a+4\right)\begin{pmatrix} a & -4 \\ -\dfrac{3}{4}a & 2 \end{pmatrix}+a(a+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=-a^2E=-a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$(1,2)$ 成分を比較して，

$-4\left(a^2+5a+4\right)=0$

$-4(a+1)(a+4)=0\quad\therefore\ a=-1,-4$

$a=-1$ のとき，$A^3=-E,-a^2E=-E$ となり，　$A^3=-a^2E$ は成り立つ．

$a=-4$ のとき，$A^3=8E,-a^2E=-16E$ となり，$A^3=-a^2E$ は成り立たない．

$\therefore\ a=-1$ 　　… (答)

(2) $a=-1$ のとき，ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2=A-E$

また，$A^3=-E$ より，$A^3+E=0$

$\therefore\ A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2+A^3+A^3\left(A+A^2+A^3\right)$

$=\left(E+A^3\right)\left(A+A^2+A^3\right)$

$=0$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 　　… (答)

(3) $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}=A+A^2+A^3$

$+A^3\left(A+A^2+\cdots+A^6\right)+A^9\left(A+A^2+\cdots+A^6\right)+A^{15}\left(A+A^2+\cdots+A^6\right)$

$+\cdots+A^{2007}\left(A+A^2+\cdots+A^6\right)$

$=A+A^2+A^3=A+(A-E)-E=2A-2E=2\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \dfrac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ \dfrac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ 　　… (答)

$\boxed{4}$

(1)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行でないので，$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$　　$\therefore\ \left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2>0$

また，

$$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2t\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2=1+t^2+2t\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$$

（θ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角）

$$=1+t^2+2t\cos\theta\leqq 1+t^2+2t=(1+t)^2$$　（等号成立は $t=0$ のとき）

$\therefore\ 0<\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2\leqq(1+t)^2$　□

(2)　$$f(t)=\left|\overrightarrow{p}\right|=\left|\frac{2t^2\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2}\right|=\frac{2t^2\left|\overrightarrow{b}\right|}{\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2}=\frac{2t^2}{\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2}\geqq\frac{2t^2}{(1+t)^2}$$　□　（(1)より）

(3)　$f(0)=0$ であり，$g(t)=\dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$ とおくと，

$$g'(t)=\frac{4t(1+t)^2-2t^2\cdot 2(1+t)}{(1+t)^4}=\frac{4t(1+t)\{(1+t)-t\}}{(1+t)^4}=\frac{4t}{(1+t)^3}$$

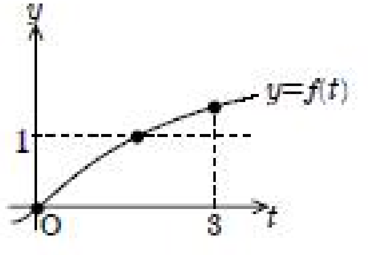
であるから，$t>0$ で，$g(t)$ は単調増加

t	(0)	$\cdots$
$g'(t)$	(0)	$+$
$g(t)$	(0)	$\nearrow$

$g(3)=\dfrac{9}{8}>1$ であり，$g(3)<f(3)$ より，

$g(3)>1$

$f(t)$ は連続する関数であるから，中間値の定理より，$f(t)=1$ となる t が $0<t<3$ の範囲に少なくとも1つは存在する．　□



$\boxed{5}$

(1)　$y=0$ のとき，$f(x)f(0)-f(x)=0$

$$f(x)\{f(0)-1\}=0$$

これが，すべての実数 x について成り立つには，$f(x)=0$　または　$f(0)=1$

ところが，すべての実数 x について $f(x)=0$ であるならば，$x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$

としたときに，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(\pi)=1$$

$$\therefore\ 0\cdot 0-0=1$$

となり，矛盾．

よって，$f(0)=1$　　… (答)

(2)　$y=h$ とおき，両辺を h で割ると，

$$\frac{f(x)f(h)-f(x+h)}{h}=\frac{\sin x\sin h}{h}$$

$$\frac{f(x)f(h)-f(x)\cdot 1+f(x)-f(x+h)}{h}=\frac{\sin x\sin h}{h}$$

$$\frac{f(x)f(h)-f(x)f(0)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin x\sin h}{h}$$

$h\to 0$ のとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{h}\cdot f(x)-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\sin x$$

$$\therefore\ f'(0)\cdot f(x)-f'(x)=\sin x$$

$f'(0)=0$ より，$-f'(x)=\sin x$　　$\therefore\ f'(x)=-\sin x$　　… (答)

(3)　$\begin{cases} f(x)=-\sin x \\ f(0)=1 \end{cases}$ より，$f(x)=\cos x$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin x|-\log|1-\sin x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\log\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$=\log\left(2+\sqrt{3}\right)\qquad\cdots\ (答)$$