

平成 25 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は，全部で5ページある。(落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。)

別に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所にならず記入すること。
- 5 受験学部，学科により解答すべき問題(○印)，解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部，学科	解答すべき問題(○印)					解答用紙 の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(数学科，物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部(化学科，生物学科，自然環境科学科)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4 枚	90 分

- 6 下書きは，問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は，持ち帰ること。

1 正の実数 a, b に対して、次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} ax + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq b \\ 0 \leq y \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) $a = \frac{3}{2}$, $b = 3$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $5x + 2y$ の最大値と、そのときの x, y の値を求めよ。

(2) $a = 1$, $b = 9$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき、 $2x + y$ の最大値と、そのときの x, y の値を求めよ。

(3) $ab = 9$ であり、点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くときの $2x + y$ の最大値が 16 であるとする。このとき、 a, b の値を求めよ。

2 一辺の長さが1の正方形ABCDを考える。点Pは、点B、Cを除いた辺BC上を動くとする。点Pを通り直線APと垂直な直線と辺CDとの交点をQとする。線分BPの長さを x とすると、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle CPQ$ の面積 S を、 x を用いて表せ。
- (2) 面積 S の最大値と、そのときの x の値を求めよ。
- (3) 線分AQの長さ L の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

3 a を実数とし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$

は $A^3 = -a^2E$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$ を求めよ。

(3) $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2011} + A^{2012} + A^{2013}$ を求めよ。

- 4 平面上の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ はそれぞれの大きさが1であり, また平行でないとする。次の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ であるような実数 t に対して, 不等式

$$0 < |\vec{a} + t\vec{b}|^2 \leq (1+t)^2$$

が成立することを示せ。

- (2) $t \geq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p} = \frac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a} + t\vec{b}|^2}$ とおき, $f(t) = |\vec{p}|$ とする。このとき, 不等式

$$f(t) \geq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

が成立することを示せ。

- (3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。

- 5 微分可能な関数 $f(x)$ が、すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし、さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。