$\boxed{1}$

$t=\cos\theta-\sin\theta$ のとき，

$$t^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$$

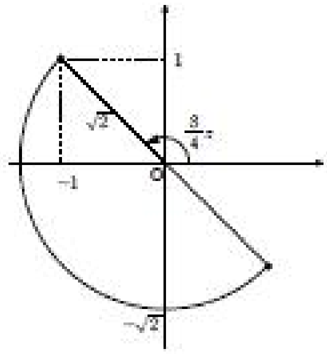
$$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=1-t^2$$

(1)

$$\begin{aligned} f(\theta)&=2\sin2\theta+4a(\cos\theta-\sin\theta)+1\\ &=2\cdot2\sin\theta\cos\theta+4a(\cos\theta-\sin\theta)+1\\ &=2(1-t^2)+4at+1\\ &=-2t^2+4at+3 \end{aligned}$$

…(答)

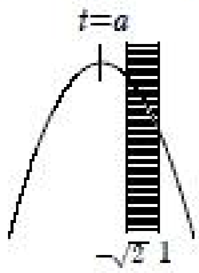
(2) $t=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$



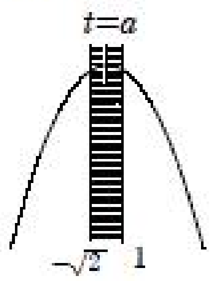
よって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq1$ …(答)

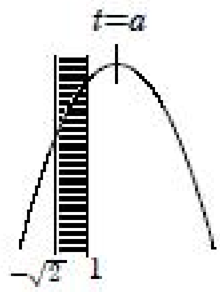
(3) $f(\theta)=-2(t-a)^2+2a^2+3=g(t)$ とおく．



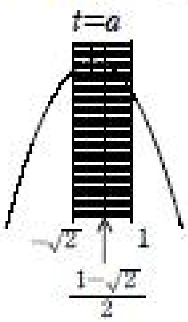
$a<-\sqrt{2}$ のとき，
最大値 $g(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}a-1$



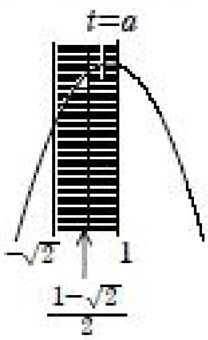
$-\sqrt{2}\leqq a\leqq1$ のとき，
最大値 $g(a)=2a^2+3$



$1<a$ のとき，
最大値 $g(1)=4a+1$



$a<\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ のとき，
最小値 $g(1)=4a+1$



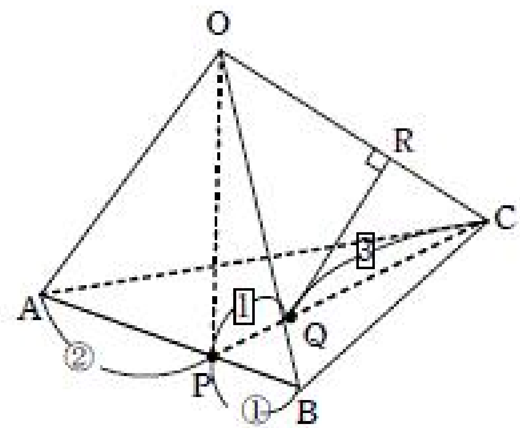
$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき，
最小値 $g(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}a-1$

以上より，$a\geqq0$ に注意して，

$$\begin{cases} 最大値\begin{cases} 2a^2+3 & (0\leqq a\leqq1)\\ 4a+1 & (a>1)\end{cases}\\ \\ 最小値\ -4\sqrt{2}a-1 \end{cases}$$

….(答)

$\boxed{2}$



$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

(1)

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{OR}=t\vec{c}$ とおく．

$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{QR}$ より，$\vec{c}\cdot\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\right)=0$

$$\vec{c}\cdot\left(t\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}\right)=0$$

$$t-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \qquad \therefore\ t=\frac{5}{8}$$

したがって，

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{8}\vec{c}-\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)

$$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\left|-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right|^2=\frac{1}{16}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{9}{64}\left|\vec{c}\right|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{3}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{3}{16}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{19}{64}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{QR}\right|=\frac{\sqrt{19}}{8} \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{4}$

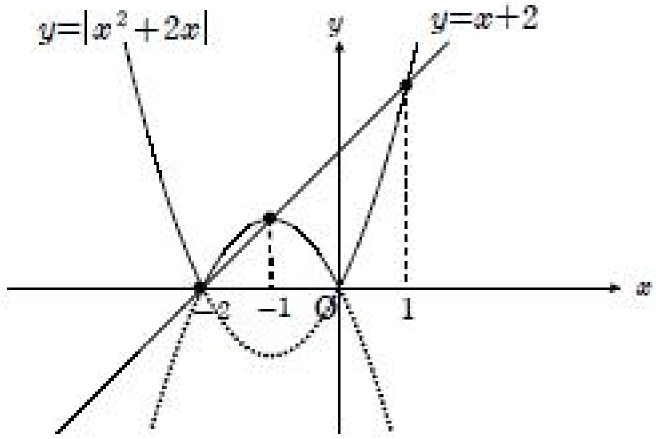
(1)

$\begin{cases} y=x^2+2x \\ y=x+2 \end{cases}$ を連立して解いて，$(x,y)=(-2,0),(1,3)$

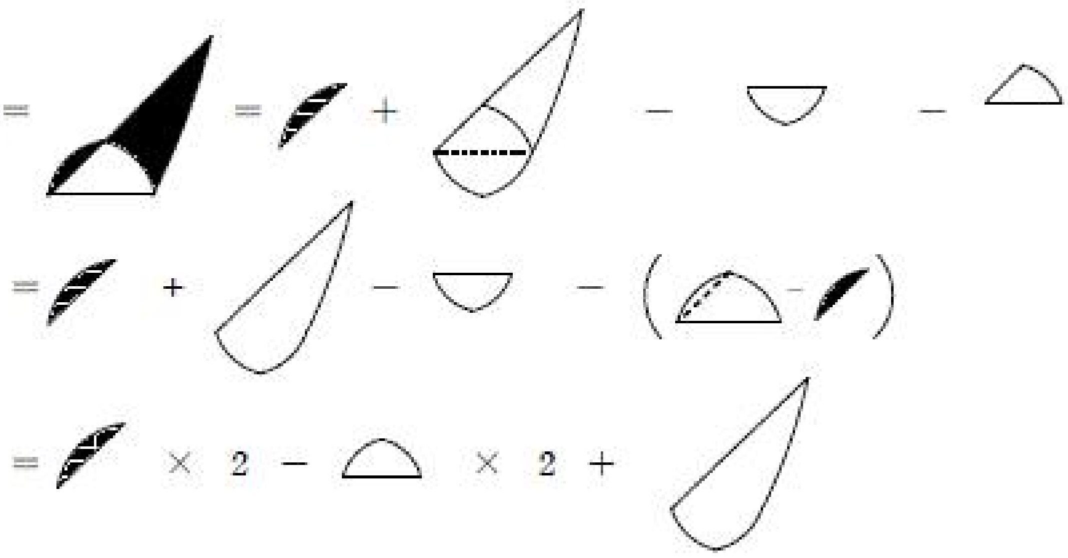
$\begin{cases} y=-(x^2+2x) \\ y=x+2 \end{cases}$ を連立して解いて，$(x,y)=(-2,0),(-1,1)$

よって,グラフより,

$(x,y)=(-2,0),(-1,1),(1,3)$ ···(答)



(2) （求める面積）＝



よって,

$$2\int_{-2}^{-1}\{-(x^2+2x)-(x+2)\}dx-2\int_{-2}^{0}\{-(x^2+2x)\}dx+\int_{-2}^{1}\{(x+2)-(x^2+2x)\}dx$$

$$=-2\int_{-2}^{-1}(x+1)(x+2)dx+2\int_{-2}^{0}x(x+2)dx-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$$

$$=\frac{2}{6}(-1+2)^3-\frac{2}{6}(0+2)^3+\frac{1}{6}(1+2)^3$$

$$=\frac{13}{6}$$ ···(答)

(3) $y=x+a$ が $y=-(x^2+2x)$ に接するとき,方程式

$x+a=-(x^2+2x)$ が重解となればよいので,

$x^2+3x+a=0$ より，$9-4a=0$ $\therefore a=\dfrac{9}{4}$

$y=x+a$ が

$(-2,0)$ を通るとき， $a=2$.

$(0,0)$ を通るとき， $a=0$

よって,グラフより,

$a>\dfrac{9}{4}, 0<a<2$ ···(答)