

1 xy 平面上に放物線 $C: y = -x^2$ がある。 $P(a, b)$ を C 上の点とする。放物線 $D: y = x^2 + px + q$ は点 P を通り、点 P における C の接線と D の接線は一致している。次の問いに答えよ。

- (1) b, p, q をそれぞれ a で表せ。
- (2) $a = 1$ のとき、放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 点 $P(a, b)$ が放物線 C 上を動くとき、放物線 D の頂点の軌跡を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを示せ。

(2) $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 3^{26} の桁数を求めよ。

3 四面体 $OABC$ において, $OA \perp OB$, $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 5$ とする。 $\triangle OAB$ の重心を G とし, 直線 CG は $\triangle OAB$ を含む平面に垂直とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{CG} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

4 箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き、カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m ，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

- (1) $m = M$ となる確率を求めよ。
- (2) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。
- (3) $m \leq 5 \leq M$ となる確率を求めよ。

平成 26 年度入学試験問題

数 学

(人文, 教育, 経済, 農学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は, 試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は, 全部で 4 ページある。(落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。) 別に解答用紙が 4 枚ある。
- 3 解答はすべて, 問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は, 各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。
- 5 解答時間は, 90 分である。
- 6 下書きは, 問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は, 持ち帰ること。

1 a を $a \geq 0$ となる実数とし、 θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2 \sin 2\theta + 4a(\cos \theta - \sin \theta) + 1$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $t = \cos \theta - \sin \theta$ とおく。このとき、 $f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。

(2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 一辺の長さが1の正四面体OABCを考える。辺ABを2:1に内分する点をPとし、線分CPを3:1に内分する点をQとする。また、直線OC上の点Rを $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(2) \overrightarrow{QR} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(3) \overrightarrow{QR} の大きさ $|\overrightarrow{QR}|$ を求めよ。

3 A の箱には 1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれた 20 枚のカードが入っている。B の箱には 1 から 30 までの整数が 1 つずつ書かれた 30 枚のカードが入っている。A, B の箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和を X とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) X が 2 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) X が 2 の倍数であるが 5 の倍数でない確率を求めよ。
- (3) X が 5 の倍数となる確率を求めよ。
- (4) X が 2 の倍数にも 5 の倍数にもならない確率を求めよ。

4 座標平面上の曲線 $y = |x^2 + 2x|$ を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 $y = x + a$ がちょうど 2 つの共有点をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。