

平成 26 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で5ページある。(落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。
別に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部、学科により解答すべき問題(○印)、解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受験学部、学科	解答すべき問題(○印)					解答用紙 の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(数学科、物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部(化学科、生物学科、自然環境科学科)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4 枚	90 分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

1 a を $a \geq 0$ となる実数とし、 θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2 \sin 2\theta + 4a(\cos \theta - \sin \theta) + 1$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $t = \cos \theta - \sin \theta$ とおく。このとき、 $f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。
- (2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 一辺の長さが1の正四面体OABCを考える。辺ABを2:1に内分する点をPとし、線分CPを3:1に内分する点をQとする。また、直線OC上の点Rを $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。さらに、 $\overrightarrow{OQ}$ の大きさ $|\overrightarrow{OQ}|$ を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{RC}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}|$ を求めよ。
- (3) $\triangle OQR$ の面積を求めよ。

3 a, b, c を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ は $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b, c の値を求めよ。
- (2) A は逆行列をもつことを示し、 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。
- (4) 自然数 n に対して、 $(A + 6A^{-1})^n$ を求めよ。

4 関数 $f(x) = (-4x^2 + 2)e^{-x^2}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) a を $a \geq 0$ となる実数とし、 $I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$ とする。このとき、定積分 $\int_0^a x^2 e^{-x^2} dx$ を a , $I(a)$ を用いて表せ。

(3) 曲線 $y = f(x)$, x 軸, y 軸および直線 $x = 5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

5 自然数 n に対して, $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して, 不等式

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。