

- (1) $P(x)=(x-1)\{x^2+(-a+1)x+1\}$ と変形できるので,
 $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商は

$$\underline{x^2+(-a+1)x+1} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

- (2) $x^2+(-a+1)x+1=0$ が虚数解を持てばよいので,
 $(-a+1)^2-4<0$
 $a^2-2a-3<0$
 $(a+1)(a-3)<0$
 よって, $-1<a<3$

$$a \text{ は整数ゆえ, } \underline{a=0, 1, 2} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

- (3) $x^2+(-a+1)x+1=0$ の解が整数となればよいので, 2つの解を α, β とすれば

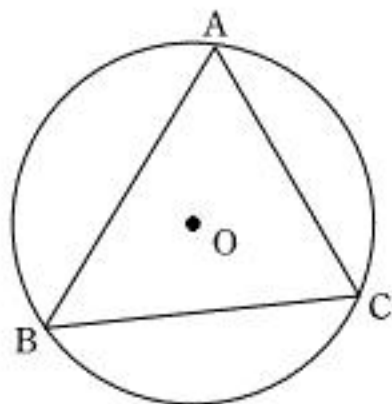
$$\begin{cases} \alpha+\beta=a-1 & \cdots \cdots \text{①} \\ \alpha\beta=1 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\alpha, \beta \text{ は整数ゆえ, ②より } (\alpha, \beta)=(1, 1) \text{ または } (-1, -1)$$

$$(\alpha, \beta)=(1, 1) \text{ のとき, ①より, } a=3$$

$$(\alpha, \beta)=(-1, -1) \text{ のとき, ①より, } a=-1$$

$$\text{したがって, } \underline{a=3, -1} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$



(1)

$$4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG} \quad \text{より}$$

$$4(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) + 3(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB}) + 5(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}) = 12\overrightarrow{OG}$$

$$12\overrightarrow{OG} - 4\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OC} = 12\overrightarrow{OG}$$

$$\text{ゆえに } 4\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

(証明終)

$$(2) \quad 5\overrightarrow{c} = -4\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} \quad \text{より,} \quad 25|\overrightarrow{c}|^2 = 16|\overrightarrow{a}|^2 + 24\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 9|\overrightarrow{b}|^2$$

$$|\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{c}|^2 = 25 \quad \text{より,} \quad 24\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \quad \text{したがって,} \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \underline{0} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$4\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{b} - 5\overrightarrow{c} \quad \text{より,} \quad 16|\overrightarrow{a}|^2 = 9|\overrightarrow{b}|^2 + 30\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 25|\overrightarrow{c}|^2$$

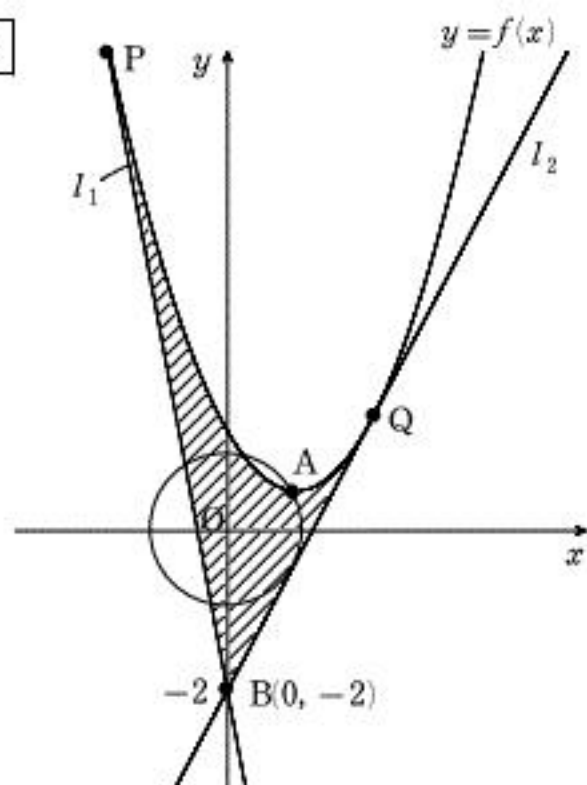
$$|\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{c}|^2 = 25 \quad \text{より,} \quad 30\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = -18 \cdot 25 \quad \text{したがって,} \quad \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \underline{-15} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$3\overrightarrow{b} = -4\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{c} \quad \text{より,} \quad 9|\overrightarrow{b}|^2 = 16|\overrightarrow{a}|^2 + 40\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} + 25|\overrightarrow{c}|^2$$

$$|\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{c}|^2 = 25 \quad \text{より,} \quad 40\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = -32 \cdot 25 \quad \text{したがって,} \quad \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = \underline{-20} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad |\overrightarrow{OG}|^2 = \left| \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \right|^2 = \frac{1}{9}(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}) = \frac{5}{9}$$

$$\text{ゆえに,} \quad |\overrightarrow{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$



(1) $f'(x) = 2(x-a)$ より,

$$l_1: y - (p-a)^2 - b = 2(p-a)(x-p)$$

$$y = 2(p-a)x - p^2 + a^2 + b$$

$$l_2: y = 2(q-a)x - q^2 + a^2 + b$$

ともに $B(0, -2)$ を通ることから,

$$-p^2 + a^2 + b = -2, \quad -q^2 + a^2 + b = -2$$

よって, p, q は x の 2 次方程式 $a^2 + b + 2 = x^2$ の 2 解であり, $p < q$ より,

$$p = -\sqrt{a^2 + b + 2}, \quad q = \sqrt{a^2 + b + 2}$$

したがって,

$$l_1: y = -2(\sqrt{a^2 + b + 2} + a)x - 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$P(-\sqrt{a^2 + b + 2}, 2a^2 + 2b + 2 + 2a\sqrt{a^2 + b + 2}) \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$l_2: y = 2(\sqrt{a^2 + b + 2} - a)x - 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$Q(\sqrt{a^2 + b + 2}, 2a^2 + 2b + 2 - 2a\sqrt{a^2 + b + 2}) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$S = \int_p^0 [(x-a)^2 + b - \{2(p-a)x - p^2 + a^2 + b\}] dx + \int_0^q [(x-a)^2 + b - \{2(q-a)x - q^2 + a^2 + b\}] dx$$

$$= \int_p^0 (x-p)^2 dx + \int_0^q (x-q)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-p)^3 \right]_p^0 + \left[\frac{1}{3}(x-q)^3 \right]_0^q$$

$$= -\frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{3}q^3$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b + 2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(a^2 + b + 2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}(a^2 + b + 2)^{\frac{3}{2}}$$

また, $A(a, b)$ は単位円上にあるので, $a^2 + b^2 = 1$ すなわち, $a^2 = 1 - b^2$

$$\text{したがって, } S = \frac{2}{3}(-b^2 + b + 3)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $-b^2 + b + 3 = -\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ と $-1 \leq b \leq 1$ より, S は $b = \frac{1}{2}$ のとき,

$$\text{最大値 } \frac{2}{3}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{13\sqrt{13}}{12} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\text{をとり, このとき } A(a, b) = (\pm\sqrt{1-b^2}, b) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(1)

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
値	0	③	2	1	0	⑥	5	4	3	⑨

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
8	7	6	⑫	11	10	9	⑮	14	13

…… (答)

(2)

『 $\{a_2, a_6, \dots, a_{4m-2}, a_{4m+2}\}$ は初項 3, 公差 3 の等差数列で, a_1 から a_{4m+2} の中で a_{4m+2} が 1 番大きく, a_{4m-2} が 2 番目に大きい』……(*)

ことを数学的帰納法を用いて示す.

(I) $m=1$ のとき, $a_2=3, a_6=6$ であり, $a_6 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 = a_1$ より, 確かに成り立つ.(II) $m=k$ のとき, 成り立つと仮定.すなわち, $\{a_2, a_6, \dots, a_{4k-2}, a_{4k+2}\}$ は初項 3, 公差 3 の等差数列で, a_1 から a_{4k+2} の中で a_{4k+2} が 1 番大きく, a_{4k-2} が 2 番目に大きいと仮定.

このとき,

$$a_{4k+3} = a_{4k+2} - 1, \quad a_{4k+4} = a_{4k+3} - 1 = a_{4k+2} - 2$$

$$a_{4k+5} = a_{4k+4} - 1 = a_{4k+2} - 3 = a_{4k-2},$$

$$a_{4k+6} = a_{4k+5} + 6 = (a_{4k+2} - 3) + 6 = a_{4k+2} + 3$$

よって, $m=k+1$ のときにも成り立つので, 数学的帰納法により, すべての自然数 m について(*)は成り立つ.

$$a_{2014} = a_{4 \cdot 503 + 2} = 3 \cdot 504 \text{ より, } a_{2015} = 3 \cdot 504 - 1 = \underline{1511} \quad \dots\dots \text{ (答)}$$

(3) 初項を除いて 4 つずつのカタマリと考えれば, 初項 6, 公差 12 の等差数列が出来ているので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{201} a_k &= a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}_{\text{①}} + \underbrace{(a_6 + a_7 + a_8 + a_9)}_{\text{②}} + \dots\dots + \underbrace{(a_{198} + a_{199} + a_{200} + a_{201})}_{\text{⑤①}} \\ &= \frac{6 + 6 + 49 \times 12}{2} \times 50 \\ &= \underline{15000} \quad \dots\dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$(1) \quad f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = \left[t - \frac{t^3}{6}\right]_0^x = \underline{x - \frac{x^3}{6}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$f_3(x) = 1 - \int_0^x f_2(t) dt = 1 - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{6}\right) dt = 1 - \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right]_0^x = \underline{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad f_1(x) - \cos x + \frac{x^4}{4!} = g(x) \quad \text{とおくと,} \quad x - \frac{x^3}{3!} < \sin x, \quad \text{すなわち} \quad \sin x + \frac{x^3}{3!} > x \text{ より,}$$

$$g'(x) = \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \cos x + \frac{x^4}{4!} \right\}' = -x + \sin x + \frac{x^3}{3!} > -x + x = 0$$

よって, $g(x)$ は単調増加.

$$g(0) = 0 \text{ より, } x \geq 0 \text{ のとき } g(x) \geq 0$$

(等号成立は $x=0$ のときのみ)

$$\text{ゆえに, } f_1(x) - \cos x \geq -\frac{x^4}{4!}$$

x	0	...	1
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0	↗	

$$\frac{x^4}{4!} - f_1(x) + \cos x = h(x) \text{ とおくと, } \sin x < x, \text{ すなわち } x - \sin x > 0 \text{ より,}$$

$$h'(x) = \left\{ \frac{x^4}{4!} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \cos x \right\}' = \frac{x^3}{3!} + x - \sin x > \frac{x^3}{3!} > 0$$

よって, $h(x)$ は単調増加.

$$h(0) = 0 \text{ より, } x \geq 0 \text{ のとき } h(x) \geq 0$$

(等号成立は $x=0$ のときのみ)

$$\text{ゆえに, } \frac{x^4}{4!} \geq f_1(x) - \cos x$$

x	0	...	1
$h'(x)$		+	
$h(x)$	0	↗	

$$\text{以上より, } 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, } -\frac{x^4}{4!} \leq f_1(x) - \cos x \leq \frac{x^4}{4!}$$

(証明終)

$$(3) \quad \text{『} 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, すべての自然数 } m \text{ に対して}$$

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq f_{2m-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \text{』} \quad \cdots \cdots (*)$$

が成り立つことを示す.

$$(I) \quad m=1 \text{ のとき, (2) より 確かに成り立つ.}$$

$$(II) \quad m=k \text{ のとき, 成り立つと仮定. すなわち,}$$

$$-\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \leq f_{2k-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \quad \cdots \cdots (**)$$

が成り立つと仮定.

$$\text{このとき, } f_{2k+1}(x) - \cos x + \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} = G(x) \text{ とおくと,}$$

$$G'(x) = \left\{ 1 - \int_0^x f_{2k}(t) dt - \cos x + \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \right\}' = -f_{2k}(x) + \sin x + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

$$G''(x) = \left\{ -\int_0^x f_{2k-1}(t) dt + \sin x + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \right\}' = -f_{2k-1}(x) + \cos x + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \geq 0 \quad ((**) \text{より})$$

$$\text{よって, } G'(x) \text{ は単調増加であり, } G'(0) = 0 \text{ より } G'(x) \geq 0$$

x	0	...	1
$G''(x)$		+	
$G'(x)$	0	↗	

$$\text{よって, } G(x) \text{ は単調増加であり, } G(0) = 0 \text{ より } G(x) \geq 0$$

$$\text{ゆえに, } f_{2k+1}(x) - \cos x \geq -\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}$$

x	0	...	1
$G'(x)$		+	
$G(x)$	0	↗	

$$\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} - f_{2k+1}(x) + \cos x = H(x) \text{ とおくと,}$$

$$H'(x) = \left\{ \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} - 1 + \int_0^x f_{2k}(t) dt + \cos x \right\}' = \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} + f_{2k}(x) - \sin x$$

$$H''(x) = \left\{ \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} + \int_0^x f_{2k-1}(t) dt - \sin x \right\}' = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} + f_{2k-1}(x) - \cos x \geq 0 \quad ((**) \text{より})$$

$$\text{よって, } H'(x) \text{ は単調増加であり, } H'(0) = 0 \text{ より } H'(x) \geq 0$$

x	0	...	1
$H''(x)$		+	
$H'(x)$	0	↗	

$$\text{よって, } H(x) \text{ は単調増加であり, } H(0) = 0 \text{ より } H(x) \geq 0$$

$$\text{ゆえに, } \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \geq f_{2k+1}(x) - \cos x$$

x	0	...	1
$H'(x)$		+	
$H(x)$	0	↗	

したがって, $m=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つので, 数学的帰納法により, すべての自然数 m に対して $(*)$ は成り立つ.

(証明終)

$$(4) \quad 0 < \frac{\pi}{6} < 1 \text{ であるから, (3) より,}$$

$$-\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}}{(2m+2)!} + \cos \frac{\pi}{6} \leq f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}}{(2m+2)!} + \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}}{(2m+2)!} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理により,}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$