

平成 27 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で 5 ページある。(落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。)別紙に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部、学科により解答すべき問題(○印)、解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受験学部、学科	解答すべき問題(○印)					解答用紙の枚数	解答時間
	①	②	③	④	⑤		
理学部(数学科, 物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部(化学科, 生物学科, 自然環境科学科)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4 枚	90 分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

1 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

2 $\triangle ABC$ の外心を O , 重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$,
 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5, \quad 4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ を示せ。

(2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ および $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。

3 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $A(a, b)$ とし、 $f(x) = (x - a)^2 + b$ とする。点 $B(0, -2)$ から放物線 $y = f(x)$ に引いた接線を l_1, l_2 とし、接点をそれぞれ $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ とする。ただし $p < q$ である。放物線 $y = f(x)$ と 2 直線 l_1, l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l_1 の方程式と接点 P の座標、および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a, b を用いて表せ。

(2) 面積 S を b を用いて表せ。

(3) 点 A が円周 C 上を動くとき、面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 (a, b) を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i) および (ii) をみたすように定める。

(i) $a_1 = 0, a_2 = 3$

(ii) 3 以上の自然数 n に対して、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。

5 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば、 $0 < x \leq 1$ のとき $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{x^4}{4!} \leq f_1(x) - \cos x \leq \frac{x^4}{4!}$$

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq f_{2m-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。