

- (1) x^2y^3 は $1, +x, +y$ をそれぞれ 1 個, 2 個, 3 個かけたときにできるので, その係数は,

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 60 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (2) x^5y^3 は $1, +x, +xy$ をそれぞれ 3 個, 2 個, 3 個かけたときにできるので, その係数は,

$${}_8C_3 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 560 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

- (3) x^8y^{13} ができるとき $1, +x, +xy, +xy^2$ をかけた個数は表のようになるので,

1	$+x$	$+xy$	$+xy^2$	計
2	1	1	6	10
2	0	3	5	10

その係数は,

$${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_6C_6 + {}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 \cdot {}_5C_5 = 5040 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

2 3点 B, C, D を通る平面の方程式を, $bx+cy+dz=1$ とおく.

$$\text{このとき, } B\left(\frac{1}{b}, 0, 0\right), C\left(0, \frac{1}{c}, 0\right), D\left(0, 0, \frac{1}{d}\right)$$

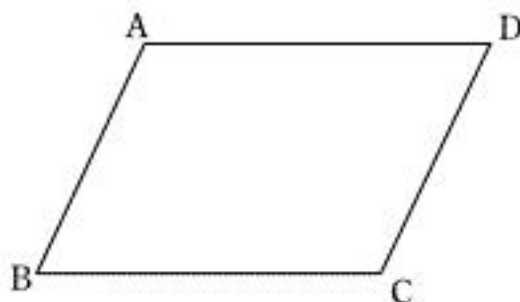
$$\text{また, } A(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) \text{ を通ることから, } \sqrt{2}b + \sqrt{3}c + \sqrt{6}d = 1$$

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形であることより,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\left(\frac{1}{b} - \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}\right) = \left(0, \frac{1}{c}, -\frac{1}{d}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{b} = \sqrt{2}, \frac{1}{c} = -\sqrt{3}, \frac{1}{d} = \sqrt{6}$$



よって,

$$B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, -\sqrt{3}, 0), D(0, 0, \sqrt{6}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{AB} = (0, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}), \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)$ より,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 9, |\overrightarrow{AD}|^2 = 5, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \square ABCD &= 2\triangle ABD = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2} \\ &= \sqrt{9 \cdot 5 - 3^2} = 6 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 平面 BCD の方程式は, $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{6}} = 1$ より,

法線ベクトルは, $\left(\frac{k}{\sqrt{2}}, -\frac{k}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{6}}\right)$ と表せる.

よって, $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}, -\frac{k}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{6}}\right)$ とおくと, H が平面 BCD 上にあることから,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{k}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{k}{\sqrt{6}} = 1 \quad \therefore k = 1$$

$$\text{したがって, } H = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(1) $a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}$ に, $n=1, 2, 3, 4$ を順次代入して,

$$a_2 = \frac{3a_1 + 1}{a_1 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_3 = \frac{3a_2 + 1}{a_2 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 3} = \frac{7}{9} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_4 = \frac{3a_3 + 1}{a_3 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{7}{9} + 1}{\frac{7}{9} + 3} = \frac{15}{17} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_5 = \frac{3a_4 + 1}{a_4 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{15}{17} + 1}{\frac{15}{17} + 3} = \frac{31}{33} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ ($n=1, 2, \dots\dots$) と推察できる. $\dots\dots(*)$

$n=1$ のとき, $(*)$ は成り立つ.

$n=k$ のとき, 成り立つと仮定. このとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{3a_k + 1}{a_k + 3} = \frac{3 \cdot \frac{2^k - 1}{2^k + 1} + 1}{\frac{2^k - 1}{2^k + 1} + 3} = \frac{3(2^k - 1) + (2^k + 1)}{2^k - 1 + 3(2^k + 1)} = \frac{4 \cdot 2^k - 2}{4 \cdot 2^k + 2} \\ &= \frac{2 \cdot 2^k - 1}{2 \cdot 2^k + 1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1} + 1} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つので, 数学的帰納法により, すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ. $\square$

(3) $\frac{2^n - 1}{2^n + 1} > 1 - 10^{-18}$ のとき, $\frac{2^n + 1 - 2}{2^n + 1} > 1 - \frac{1}{10^{18}}$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{2^n + 1} &> 1 - \frac{1}{10^{18}} \\ \frac{1}{10^{18}} &> \frac{2}{2^n + 1} \end{aligned}$$

$10^{18} > 0, 2^n + 1 > 0$ より,

$$\begin{aligned} 2^n + 1 &> 2 \cdot 10^{18} \\ 2^{n-1} + \frac{1}{2} &> 10^{18} \\ \therefore 2^{n-1} &> 10^{18} - \frac{1}{2} \quad \dots\dots(*) \end{aligned}$$

$2^{n-1}, 10^{18}$ はともに自然数ゆえ, $2^{n-1} \geq 10^{18} \quad \therefore \log_{10} 2^{n-1} \geq \log_{10} 10^{18}$

$$(n-1)\log_{10} 2 \geq 18$$

$$n-1 \geq \frac{18}{\log_{10} 2} = \frac{18}{0.3010} = 59.8\dots\dots$$

$$\therefore n \geq 60.8\dots\dots$$

したがって, 与式をみたす最小の自然数 n は, 61 $\dots\dots(\text{答})$

(1) 直線 PQ: $x + \frac{y}{2} = 1$ より, $y = -2x + 2$

これが $y = -ax^2 + b$ と接することより, $-ax^2 + b = -2x + 2$

すなわち, $ax^2 - 2x + 2 - b = 0$ の判別式を D とすると,

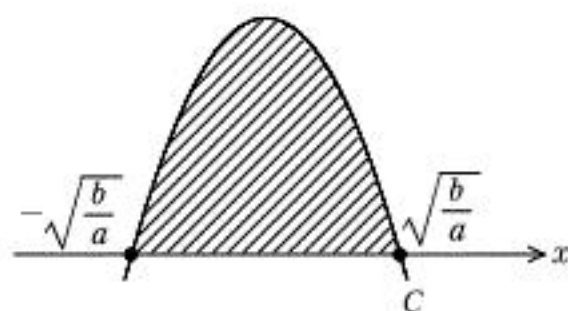
$$\frac{D}{4} = 1 - a(2 - b) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2 - b} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $-ax^2 + b = 0$ を解いて, $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (-ax^2 + b) dx = \frac{a}{6} \left[\sqrt{\frac{b}{a}} - \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right]^3 \\ &= \frac{a}{6} \cdot \frac{8b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{4b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}} = \frac{4}{3} b\sqrt{b(2-b)} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(3) $\frac{S}{\sqrt{b}} = \frac{4}{3} b\sqrt{2-b} = \frac{4}{3} \sqrt{b^2(2-b)}$ より, $b^2(2-b)$ が最大となるとき, $\frac{S}{\sqrt{b}}$ は最大となる.

ここで, $b^2(2-b) = f(b)$ とおくと, $f'(b) = 4b - 3b^2 = b(4 - 3b)$

増減表より, $0 < b < 2$ で,

$$b = \frac{4}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

のとき, $f(b)$ は最大となり, $\frac{S}{\sqrt{b}}$ も最大となる.

