

- (1) x^2y^3 は $1, +x, +y$ をそれぞれ 1 個, 2 個, 3 個かけたときにできるので, その係数は,

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 60 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) x^5y^3 は $1, +x, +xy$ をそれぞれ 3 個, 2 個, 3 個かけたときにできるので, その係数は,

$${}_8C_3 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 560 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (3) x^8y^{13} ができるとき $1, +x, +xy, +xy^2$ をかけた個数は表のようになるので,

1	$+x$	$+xy$	$+xy^2$	計
2	1	1	6	10
2	0	3	5	10

その係数は,

$${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_6C_6 + {}_{10}C_2 \cdot {}_8C_3 \cdot {}_5C_5 = 5040 \quad \dots\dots(\text{答})$$

2 3点 B, C, D を通る平面の方程式を, $bx+cy+dz=1$ とおく.

$$\text{このとき, } B\left(\frac{1}{b}, 0, 0\right), C\left(0, \frac{1}{c}, 0\right), D\left(0, 0, \frac{1}{d}\right)$$

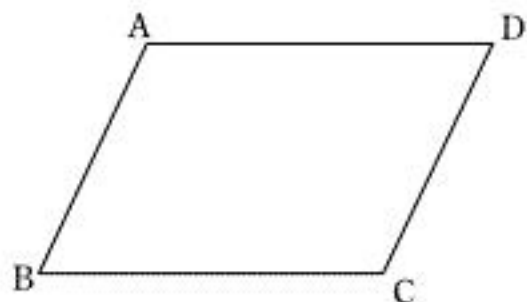
$$\text{また, } A(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) \text{ を通ることから, } \sqrt{2}b + \sqrt{3}c + \sqrt{6}d = 1$$

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形であることより,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\left(\frac{1}{b} - \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}\right) = \left(0, \frac{1}{c}, -\frac{1}{d}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{b} = \sqrt{2}, \frac{1}{c} = -\sqrt{3}, \frac{1}{d} = \sqrt{6}$$



よって,

$$B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, -\sqrt{3}, 0), D(0, 0, \sqrt{6}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{AB} = (0, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}), \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)$ より,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 9, |\overrightarrow{AD}|^2 = 5, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \square ABCD &= 2\triangle ABD = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2} \\ &= \sqrt{9 \cdot 5 - 3^2} = 6 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 平面 BCD の方程式は, $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{6}} = 1$ より,

法線ベクトルは, $\left(\frac{k}{\sqrt{2}}, -\frac{k}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{6}}\right)$ と表せる.

よって, $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}, -\frac{k}{\sqrt{3}}, \frac{k}{\sqrt{6}}\right)$ とおくと, H が平面 BCD 上にあることから,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{k}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{k}{\sqrt{6}} = 1 \quad \therefore k = 1$$

$$\text{したがって, } H = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(1) $a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}$ に, $n=1, 2, 3, 4$ を順次代入して,

$$a_2 = \frac{3a_1 + 1}{a_1 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_3 = \frac{3a_2 + 1}{a_2 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 3} = \frac{7}{9} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_4 = \frac{3a_3 + 1}{a_3 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{7}{9} + 1}{\frac{7}{9} + 3} = \frac{15}{17} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$a_5 = \frac{3a_4 + 1}{a_4 + 3} = \frac{3 \cdot \frac{15}{17} + 1}{\frac{15}{17} + 3} = \frac{31}{33} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ ($n=1, 2, \dots\dots$) と推察できる. $\dots\dots(*)$

$n=1$ のとき, $(*)$ は成り立つ.

$n=k$ のとき, 成り立つと仮定. このとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{3a_k + 1}{a_k + 3} = \frac{3 \cdot \frac{2^k - 1}{2^k + 1} + 1}{\frac{2^k - 1}{2^k + 1} + 3} = \frac{3(2^k - 1) + (2^k + 1)}{2^k - 1 + 3(2^k + 1)} = \frac{4 \cdot 2^k - 2}{4 \cdot 2^k + 2} \\ &= \frac{2 \cdot 2^k - 1}{2 \cdot 2^k + 1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1} + 1} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つので, 数学的帰納法により, すべての自然数 n について $(*)$ は成り立つ. $\square$

(3) $\frac{2^n - 1}{2^n + 1} > 1 - 10^{-18}$ のとき, $\frac{2^n + 1 - 2}{2^n + 1} > 1 - \frac{1}{10^{18}}$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{2^n + 1} &> 1 - \frac{1}{10^{18}} \\ \frac{1}{10^{18}} &> \frac{2}{2^n + 1} \end{aligned}$$

$10^{18} > 0, 2^n + 1 > 0$ より,

$$\begin{aligned} 2^n + 1 &> 2 \cdot 10^{18} \\ 2^{n-1} + \frac{1}{2} &> 10^{18} \\ \therefore 2^{n-1} &> 10^{18} - \frac{1}{2} \quad \dots\dots(*) \end{aligned}$$

$2^{n-1}, 10^{18}$ はともに自然数ゆえ, $2^{n-1} \geq 10^{18} \quad \therefore \log_{10} 2^{n-1} \geq \log_{10} 10^{18}$

$$\begin{aligned} (n-1)\log_{10} 2 &\geq 18 \\ n-1 &\geq \frac{18}{\log_{10} 2} = \frac{18}{0.3010} = 59.8\dots\dots \\ \therefore n &\geq 60.8\dots\dots \end{aligned}$$

したがって, 与式をみたす最小の自然数 n は, 61 $\dots\dots(\text{答})$

$$(1) \quad x^2 + 4y^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

微分して、

$$2xdx + 8ydy = 0$$

$$\therefore (x, 4y) \cdot (dx, dy) = 0$$

点 $Q(a, b)$ における $\textcircled{1}$ の法線ベクトルの 1 つは $(a, 4b)$ と表せるので、

Q における接線の方程式は、

$$a(x-a) + 4b(y-b) = 0$$

$$ax + 4by = a^2 + 4b^2$$

Q は $\textcircled{1}$ 上の点であるから、

$$a^2 + 4b^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

以上より、 $Q(a, b)$ における $\textcircled{1}$ の接線 l の方程式は、

$$ax + 4by = 1 \quad \square$$

(2) $P(-1, -t)$ は l 上の点であるから、

$$-a - 4bt = 1$$

$$\therefore a = -1 - 4bt$$

これを $\textcircled{2}$ に代入して、

$$(-1 - 4bt)^2 + 4b^2 = 1$$

$$(16t^2 + 4)b^2 + 8tb = 0$$

$$4b\{(4t^2 + 1)b + 2t\} = 0$$

$b = 0$ のとき、 $a = -1$ となり、 l は y 軸に平行な直線となるので、 $b \neq 0$

$$\therefore b = \frac{-2t}{4t^2 + 1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

このとき、

$$a = -1 - 4t \cdot \frac{-2t}{4t^2 + 1} = \frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) l と x 軸、 y 軸との交点を、それぞれ A 、 B とおくと、

$$A\left(\frac{1}{a}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{4b}\right)$$

$t > \frac{1}{2}$ より、 $-2t < -1$ であるから、

$$b = \frac{-2t}{4t^2 + 1} < 0$$

また、 $2t > 1$ より、 $4t^2 > 1$ であるから、

$$a = \frac{4t^2 - 1}{4t^2 + 1} > 0$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{4b}\right) = -\frac{1}{8ab} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{4t^2 + 1}{4t^2 - 1} \cdot \frac{4t^2 + 1}{-2t} = \frac{(4t^2 + 1)^2}{16t(4t^2 - 1)} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(4)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(4t^2 + 1)^2}{16t^2(4t^2 - 1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{t^2}\right)^2}{16\left(4 - \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{4^2}{16 \cdot 4} = \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(1)

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$f''(x) = -4xe^{1-x^2} + (1-2x^2) \cdot (-2x)e^{1-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{1-x^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

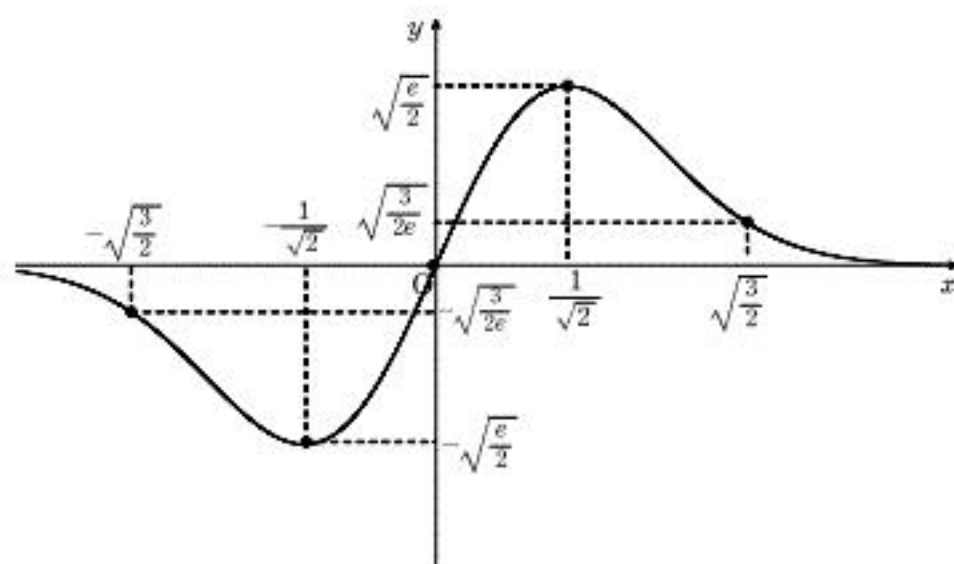
x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$f(-x) = -f(x)$ より, $f(x)$ は奇関数であり,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{1-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2e}}, f(0) = 0 \text{ より,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{極大値 } \sqrt{\frac{e}{2}} \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} \right), \text{ 極小値 } -\sqrt{\frac{e}{2}} \left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} \right) \\ \text{変曲点 } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2e}} \right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2e}} \right), (0, 0) \end{array} \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

また, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \cdot xe^{-x^2} = 0$ より, 漸近線は, $y = 0$ $\dots\dots(\text{答})$



(3)

$$xe^{1-x^2} - x^k = x(e^{1-x^2} - x^{k-1})$$

ここで, $0 < x < 1$ のとき, $1 < e^{1-x^2} < e, -1 \leq -x^{k-1} < 0$ より,

$$0 < e^{1-x^2} - x^{k-1} < e$$

よって, $x(e^{1-x^2} - x^{k-1}) > 0$ となるので,

$$xe^{1-x^2} > x^k$$

また, $x > 1$ のとき, $e^{1-x^2} < 1, -x^2 \leq -1$ より,

$$e^{1-x^2} - x^2 < 0$$

よって, $x(e^{1-x^2} - x^{k-1}) < 0$ となるので,

$$xe^{1-x^2} < x^k$$

さらに, $x = 1$ のとき, $xe^{1-x^2} = x^k$ より,

$y = f(x)$ と $y = x^k$ は, $x > 0$ のとき, $x = 1$ でのみ共有点をもつ.

$y = x^k$ は, k が偶数のとき偶関数, 奇数のとき奇関数より,

$$S_k = \int_0^1 (xe^{1-x^2} - x^k) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2} - \frac{1}{k+1}x^{k+1} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{k+1} \quad (k \text{ は偶数})$$

$$\therefore S_k = \begin{cases} \frac{e-1}{2} - \frac{1}{k+1} & (k \text{ は偶数}) \\ e-1 - \frac{2}{k+1} & (k \text{ は奇数}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(4) \quad 4\left(e-1 - \frac{2}{2n-1+1}\right) > 7\left(\frac{e-1}{2} - \frac{1}{2m+1}\right) \text{ より,}$$

$$\frac{e-1}{2} + \frac{7}{2m+1} > \frac{4}{n}$$

$2m+1$ は 3 以上の奇数であるから,

$$\frac{e-1}{2} < \frac{e-1}{2} + \frac{7}{2m+1} \leq \frac{e-1}{2} + \frac{7}{3}$$

よって, $n > \frac{4}{\frac{e-1}{2} + \frac{7}{2m+1}}$ がすべての自然数 m について成り立つには,

$$n > \frac{4}{\frac{e-1}{2}} = \frac{8}{e-1} \text{ とすればよい.}$$

$2.7 < e < 2.8$ より,

$$1.7 < e-1 < 1.8$$

$$\therefore 4.4\dots < \frac{8}{e-1} < 4.7\dots$$

であるから, 求める最小の自然数 n は, 5 $\dots\dots(\text{答})$