

(1)

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$

$$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0$$

 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ より

$$2\sin\theta + 1 = 0$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

等式を満たす θ のうち、 $0 \leq \theta < 2\pi$ に含まれるものは $\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \dots$ (答)

(2)

 $3^x = t$ とおく. ($t > 0$)

$$t^2 - t < 6$$

$$t^2 - t - 6 < 0$$

$$(t-3)(t+2) < 0 \dots \textcircled{1}$$

 $t > 0$ より、 $0 < t < 3$. すなわち

$$3^x < 3^1$$

関数 $f(x) = 3^x$ は実数全体で単調に増加することから $x < 1 \dots$ (答)

(3)

真数は正なので、 $x > 0 \dots \textcircled{1}$

 $\log_{10} x = t$ とおく. このとき

$$t^2 \geq 2t + 8$$

$$t^2 - 2t - 8 \geq 0$$

$$(t-4)(t+2) \geq 0$$

$$t \leq -2, t \geq 4$$

すなわち

$$\log_{10} x \leq -2, \log_{10} x \geq 4$$

$$\log_{10} x \leq \log_{10} \frac{1}{100}, \log_{10} x \geq \log_{10} 10000$$

関数 $f(x) = \log_{10} x$ は $x > 0$ で単調に増加することから、①とあわせて $0 < x \leq \frac{1}{100}, x \geq 10000 \dots$ (答)

(1)

 $|\vec{a}| = \sqrt{7}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ である.

 $|\vec{AB}| = \sqrt{6}$ より

$$|\vec{OB} - \vec{OA}| = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 6$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 6$$

$$5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 7 = 6$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \text{ (答)}$$

また, 点 C から辺 OA, OB に下した垂線の足を M, N と

すれば, 三角形の外心は各辺の垂直二等分線の交点である

ことから, M, N は辺 OA, OB の中点である.

ゆえに, $\angle COA = \alpha$, $\angle COB = \beta$ とすれば

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{OA}| |\vec{OC}| \cos \alpha = OA \times OM = OA \times \frac{1}{2} OA = \frac{7}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{OB}| |\vec{OC}| \cos \beta = OB \times ON = OB \times \frac{1}{2} OB = \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{3} \quad \cdots \text{ (答)}$$

((1) 別解)

点 M, N は解答と同様に定める.

$$OA \perp MC \quad \text{より} \quad \vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OM}) = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$OB \perp NC \quad \text{より} \quad \vec{OB} \cdot (\vec{OC} - \vec{ON}) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

④より

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 = \frac{7}{2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

⑤より

$$\vec{b} \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{2} \vec{b} \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} |\vec{b}|^2 = \frac{5}{2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2)

 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \cdots \textcircled{6} \quad \text{と, ②, ③より}$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = \frac{7}{2} \\ \vec{b} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{7}{2} \\ s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14s + 6t = 7 \\ 6s + 10t = 5 \end{cases}$$

$$(s, t) = \left(\frac{5}{13}, \frac{7}{26} \right) \quad \cdots \text{ (答)}$$

((2) 別解)

外接円の半径を r とすれば

$$r = |\vec{OC}| = |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$$

すなわち

$$\begin{cases} |\vec{OC}| = |\vec{AC}| \\ |\vec{OC}| = |\vec{BC}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\vec{c}| = |\vec{c} - \vec{a}| \\ |\vec{c}| = |\vec{c} - \vec{b}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |s\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |(s-1)\vec{a} + t\vec{b}|^2 \\ |s\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |s\vec{a} + (t-1)\vec{b}|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7s^2 + 6st + 5t^2 = 7(s-1)^2 + 6(s-1)t + 5t^2 \\ 7s^2 + 6st + 5t^2 = 7s^2 + 6s(t-1) + 5(t-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14s + 6t = 7 \\ 6s + 10t = 5 \end{cases}$$

$$(s, t) = \left(\frac{5}{13}, \frac{7}{26} \right) \quad \cdots \text{ (答)}$$

(3)

$\angle BOA = \theta$ とする. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{35}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}$$

従って, B(x, y) とすれば

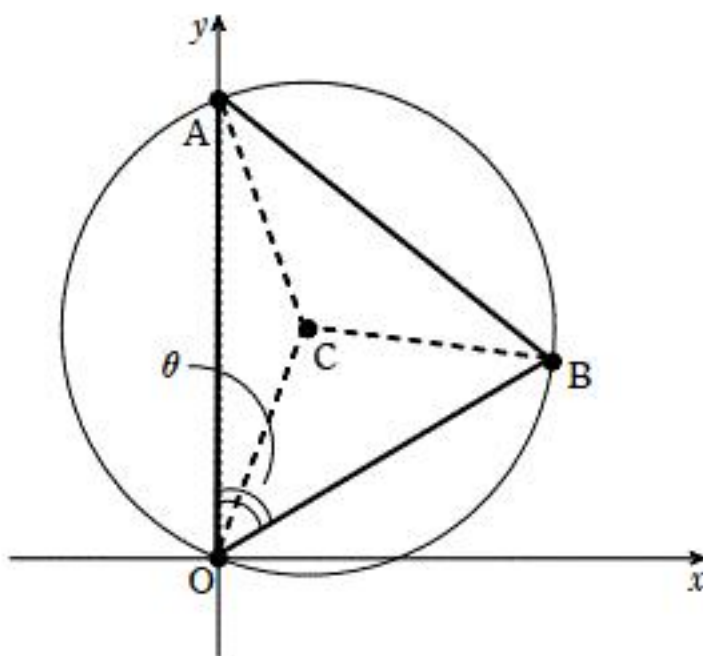
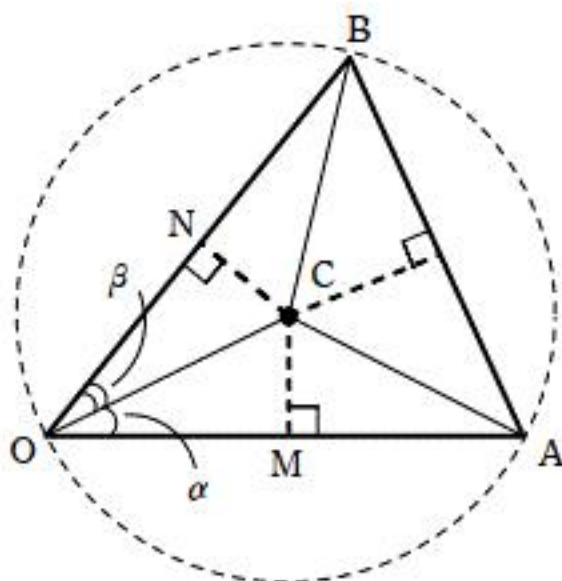
$$x = OB \sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{7}}, \quad y = OB \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

すなわち $B\left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}}\right) \quad \cdots \text{ (答)}$

また, ⑥より

$$\vec{OC} = \frac{5}{13} \vec{OA} + \frac{7}{26} \vec{OB} = \frac{5}{13} (0, \sqrt{7}) + \frac{7}{26} \left(\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}} \right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}, \frac{\sqrt{7}}{2} \right)$$

ゆえに, $C\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \quad \cdots \text{ (答)}$



(1)

袋 A から取り出した 3 個の玉が赤玉 1 個と白玉 2 個である確率は

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_7C_3} = \frac{2 \times 10}{35} = \frac{4}{7} \quad \cdots (\text{答})$$

また、白玉 3 個である確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \quad \cdots (\text{答})$$

(2)

袋 A から取り出される白玉の数に応じて場合を分ける.

ア) 袋 A から赤玉 1 個, 白玉 2 個を取り出して袋 B に移す場合

$$p_1 = \frac{4}{7} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{35}$$

イ) 袋 A から白玉 3 個を取り出して袋 B に移す場合

$$p_2 = \frac{2}{7} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{35}$$

ア, イは排反なので, 求める確率は

$$p_1 + p_2 = \frac{2+3}{35} = \frac{1}{7} \quad \cdots (\text{答})$$

(3)

事象 S : 袋 B から取り出した玉が 2 個とも白玉

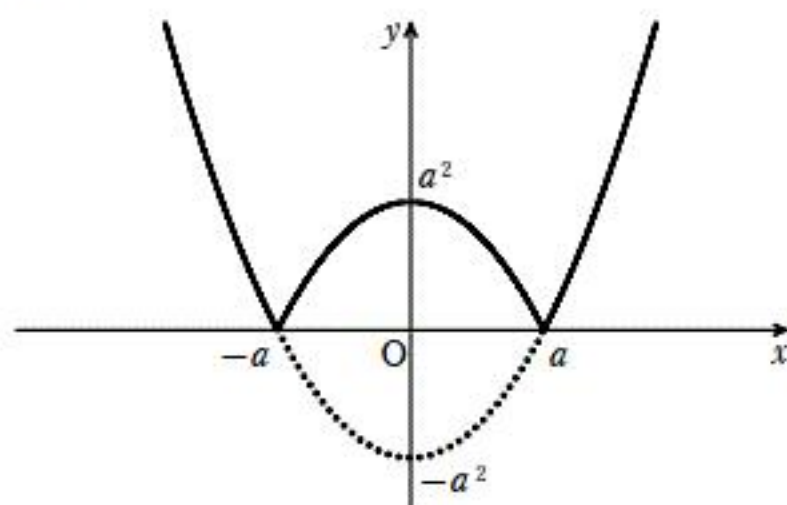
事象 T : 袋 B に白玉が残っている

と定める. 求める条件付き確率は

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{p_2}{p_1 + p_2} = \frac{3}{5} \quad \cdots (\text{答})$$

(1)

下図の通り.



(2)

ア) $0 < a \leq 2$ のとき $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x$ とする.

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^a (-x^2 + a^2) dx + \int_a^2 (x^2 - a^2) dx \\
 &= [-F(a) + F(0)] + [F(2) - F(a)] \\
 &= F(2) - 2F(a) \\
 &= \left(\frac{8}{3} - 2a^2\right) - 2\left(-\frac{2}{3}a^3\right) \\
 &= \frac{4}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

イ) $a \geq 2$ のとき

$$S_2 = \int_0^2 (-x^2 + a^2) dx = -F(2) + F(0) = 2a^2 - \frac{8}{3}$$

ゆえに

$$S = \begin{cases} \frac{4}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3} & (0 < a \leq 2 \text{ のとき}) \\ 2a^2 - \frac{8}{3} & (a \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(3)

 $f(a) = \frac{4}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3}$ とする.

$$f'(a) = 4a^2 - 4a = 4a(a-1)$$

ゆえに, $0 < a \leq 2$ における $f(a)$ の増減は下表の通り.

a	(0)	...	1	...	2
$f'(a)$	(0)	-	0	+	
$f(a)$	$\left(\frac{8}{3}\right)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$

また, $g(a) = 2a^2 - \frac{8}{3}$ とすると, $g(a)$ は $a \geq 2$ で単調増加.

ゆえに, 最小値は

$$a = 1 \text{ のとき } S = 2 \quad \dots \text{ (答)}$$

